Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Teoria de Màquines i Mecanismes

Exàmens Curs 2022-2023

Lluïsa Jordi Nebot

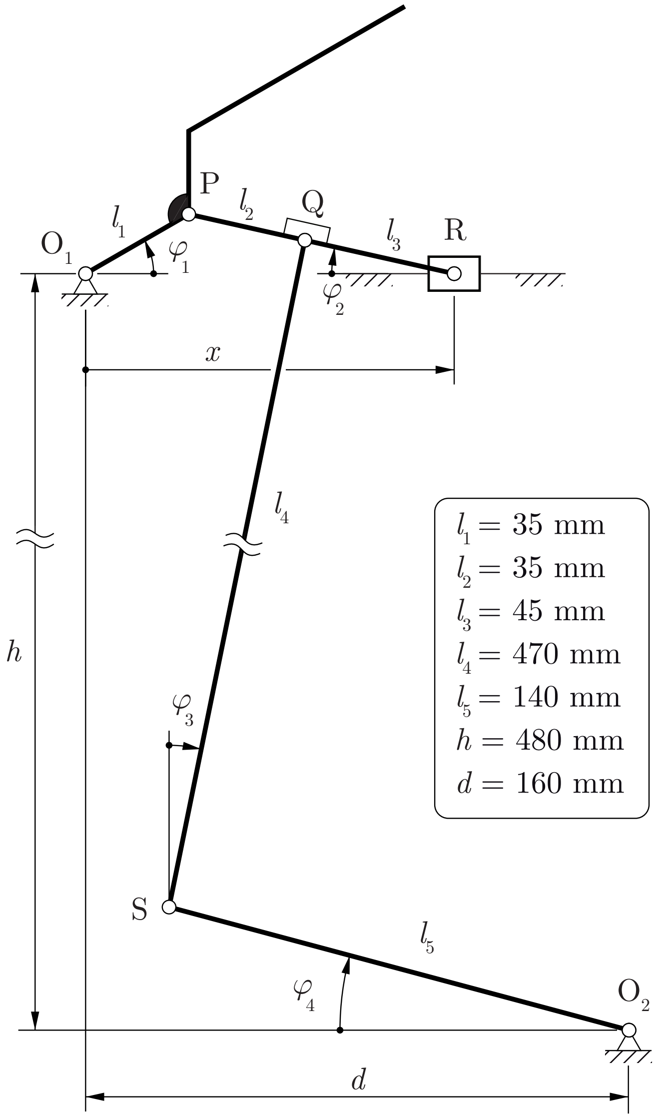
Joan Puig Ortiz

Enrique Zayas Figueras

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [**6 punts**]



La fotografia i l'esquema de la figura corresponen al d'una màquina manual per posar taps de suro a les ampolles.

Per analitzar el mecanisme, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, x\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

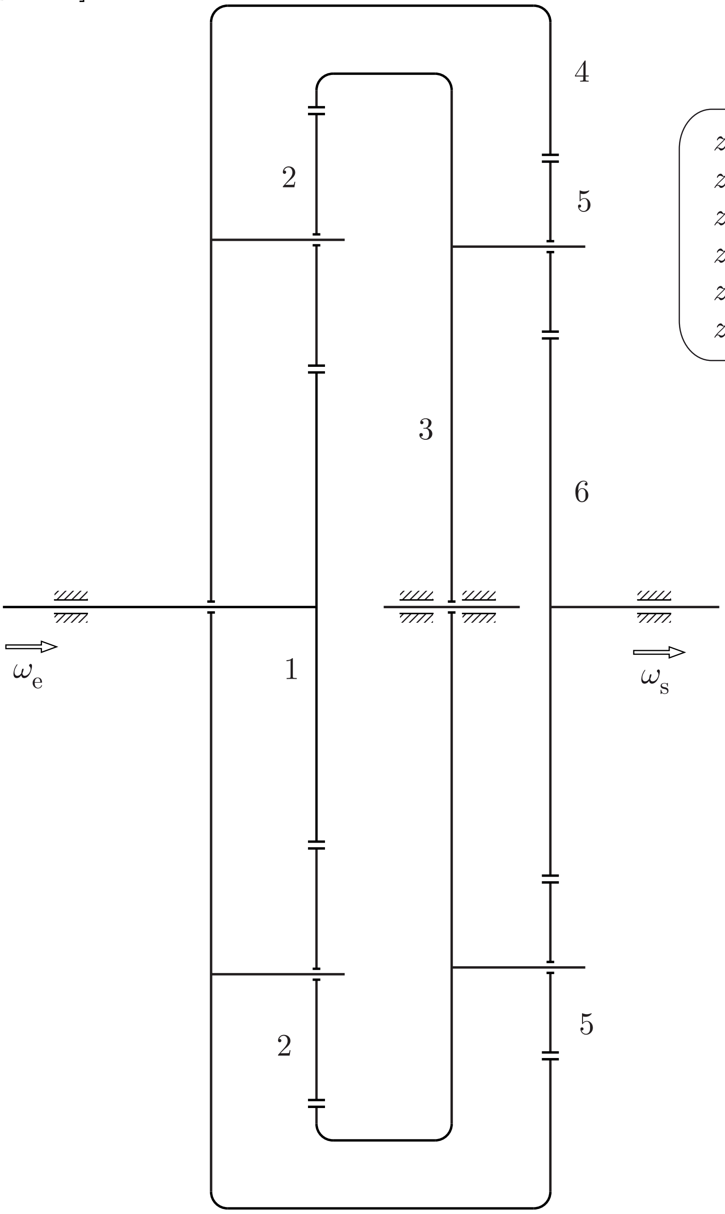
b) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi_q}$.

c) El centre instantani de rotació, $\mathrm{I}_{\mathrm{QS/terra}}$, de la biela QS respecte el terra.

En la configuració corresponent al màxim de la coordenada x, determineu

d) La velocitat angular $\dot{\varphi}_2$ de la biela PR en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ de la manovella $\mathrm{O_1P}$.

Exercici 2 [4 punts]



$z_1 = 35$
$z_2 = 19$
$z_3 = 73$
$z_4 = 66$
$z_5 = 13$
$z_6 = 40$

Per a l'estudi del tren d'engranatges de la figura s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) Les equacions cinemàtiques d'enllaç entre les velocitats generalitzades.

b) Els valors de les relacions de transmissió $\tau = \omega_{\mathrm{s}} / \omega_{\mathrm{e}}$ que es poden obtenir quan $\omega_3 = 0$ i quan $\omega_4 = 0$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la velocitat angular de la barra O_1P, $\dot{\varphi}_1 = 0$, el punt P queda fix a terra i el triangle O_1PR esdevé indeformable. Amb el punt Q aturat, la distància QO_2 esdevé constant i el triangle QSO_2 també esdevé indeformable. Es conclou que el mecanisme té 1 grau de llibertat. De fet, el mecanisme és un pistó-biela-manovella amb un grup d'Assur format per les barres QS i SO_2 i les articulacions Q, S i O_2.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dona un número igual a 1.

$$5\cdot(\text{sòlids mòbils})\times 3 - 6\cdot(\text{articulacions})\times 2 - 1\cdot(\text{p. prismàtic})\times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que s'obtenen, per exemple, imposant el tancament dels anells O_1PRO_1 i $O_1PQSO_2O_1$.

$$\begin{cases} l_1\cos\varphi_1 + \left(l_2+l_3\right)\cos\varphi_2 - x = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - \left(l_2+l_3\right)\sin\varphi_2 = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 - l_4\sin\varphi_3 + l_5\cos\varphi_4 - d = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2 - l_4\cos\varphi_3 - l_5\sin\varphi_4 + h = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -\left(l_2+l_3\right)\sin\varphi_2 & 0 & 0 & -1 \\ l_1\cos\varphi_1 & -\left(l_2+l_3\right)\cos\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_4\cos\varphi_3 & -l_5\sin\varphi_4 & 0 \\ l_1\cos\varphi_1 & -l_2\cos\varphi_2 & l_4\sin\varphi_3 & -l_5\cos\varphi_4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La velocitat del punt S és perpendicular a O_2S. Per tant, el centre instantani de rotació de la biela QS respecte al terra, $I_{QS/terra}$, es troba sobre la recta O_2S.

Per altra banda, es coneix que el centre instantani de rotació de la biela PR respecte al terra, $I_{PR/terra}$, es troba en la intersecció de la recta vertical que passa per R i la prolongació de la recta O_1P.

L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids terra –0–, biela PR –1– i biela QS –2– indica que el centre instantani de rotació del sòlid 2 respecte al terra es troba sobre la recta que uneix $I_{PR/terra}$ i el punt Q, ja que aquest punt és el centre instantani relatiu I_{12}.

Per tant, $I_{QS/terra}$ es troba en la intersecció de la recta que uneix $I_{PR/terra}$ i el punt Q amb la prolongació de la recta O_2S.

d) La configuració corresponent al màxim de la coordenada x es produeix quan $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ i per tant $x_{max} = 115$ mm. En aquesta configuració, el punt R és el centre instantani de rotació de la barra PR. Per tant, la celeritat del punt P, $v(\mathrm{P})$, es pot escriure com:

$$v(\mathrm{P}) = l_1\dot{\varphi}_1 \quad \text{i} \quad v(\mathrm{P}) = \left(l_2 + l_3\right)\dot{\varphi}_2 \;\rightarrow\; \dot{\varphi}_2 = \frac{l_1}{l_2 + l_3}\dot{\varphi}_1 = 0,4375\,\dot{\varphi}_1$$

Alternativament, la segona equació cinemàtica d'enllaç particularitzada a aquesta configuració proporciona la relació desitjada.

$$l_1\dot{\varphi}_1 - \left(l_2 + l_3\right)\dot{\varphi}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{l_1}{l_2 + l_3}\dot{\varphi}_1 = 0,4375\,\dot{\varphi}_1$$

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per dos trens epicicloidals simples:

– Tren 1: 1 (planeta), 2 (satèl·lit), 3 (corona) i 4 (braç)
– Tren 2: 4 (corona), 5 (satèl·lit), 6 (planeta) i 3 (braç).

Per a cadascun del trens es pot determinar l'equació que relaciona les velocitats angulars dels elements que giren entorn de l'eix fix, des de la referència fixa al braç corresponent (equació de Willis).

Si en el primer tren es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 3 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{3/\mathrm{b1}}}{\omega_{1/\mathrm{b1}}} = \frac{\omega_3 - \omega_{\mathrm{b1}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{b1}}} \quad \rightarrow \quad \tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\mathrm{b1}} - \omega_3 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_1 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\mathrm{conductores}}}{\prod z_{\mathrm{conduides}}} = -\frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_3} = -\frac{35}{73} = -0,4795.$$

Si en el segon tren es pren com a entrada la roda 4 i com a sortida la roda 6 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{6/\mathrm{b2}}}{\omega_{4/\mathrm{b2}}} = \frac{\omega_6 - \omega_{\mathrm{b2}}}{\omega_4 - \omega_{\mathrm{b2}}} \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_4 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\mathrm{b2}} - \omega_6 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\mathrm{conductores}}}{\prod z_{\mathrm{conduides}}} = -\frac{z_4 \cdot z_5}{z_5 \cdot z_6} = -\frac{66}{40} = -1,65.$$

La unió dels dos trens fa que el braç 1 i la roda 4 siguin solidaris: $\omega_{\mathrm{b}1} = \omega_4$; i que el braç 2 sigui solidari a la roda 3: $\omega_{\mathrm{b}2} = \omega_3$. En conseqüència es pot escriure:

$$\tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_4 - \omega_3 = 0$$
$$\tau_2\,\omega_4 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_3 - \omega_6 = 0$$

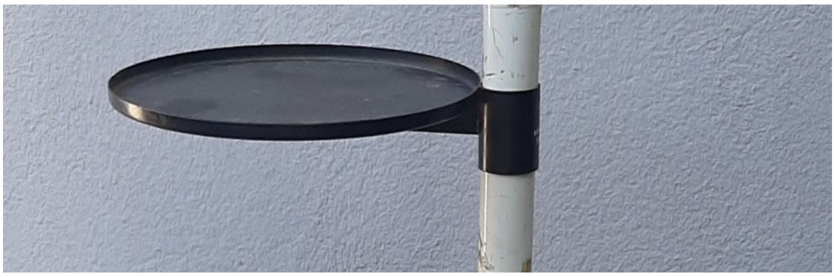
b) Tenint en compte que $\omega_{\mathrm{e}} = \omega_1$ i que $\omega_{\mathrm{s}} = \omega_6$ es poden determinar les relacions de transmissió:

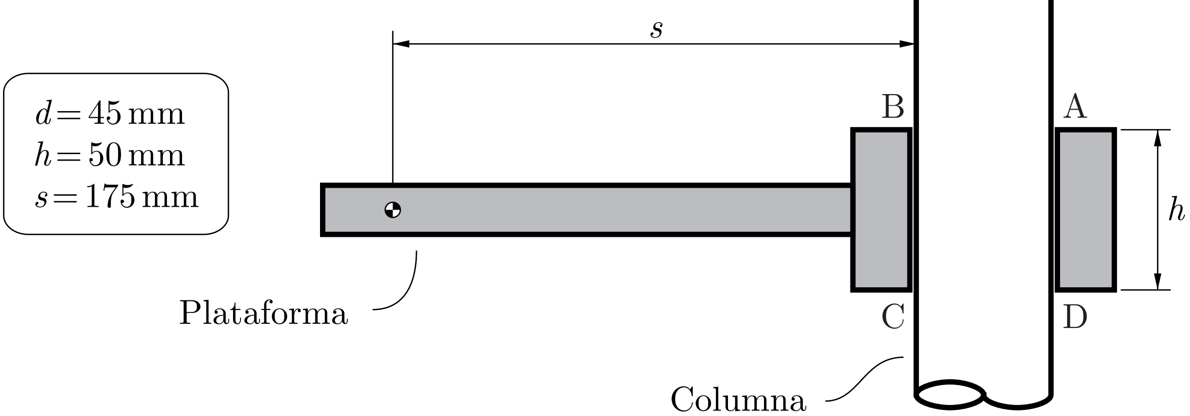
$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_6}{\omega_1}\right|_{\omega_3=0} = \frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1 - 1} = -0{,}5347.$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_6}{\omega_1}\right|_{\omega_4=0} = \tau_1\left(1 - \tau_2\right) = -1{,}271.$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [2 punts]





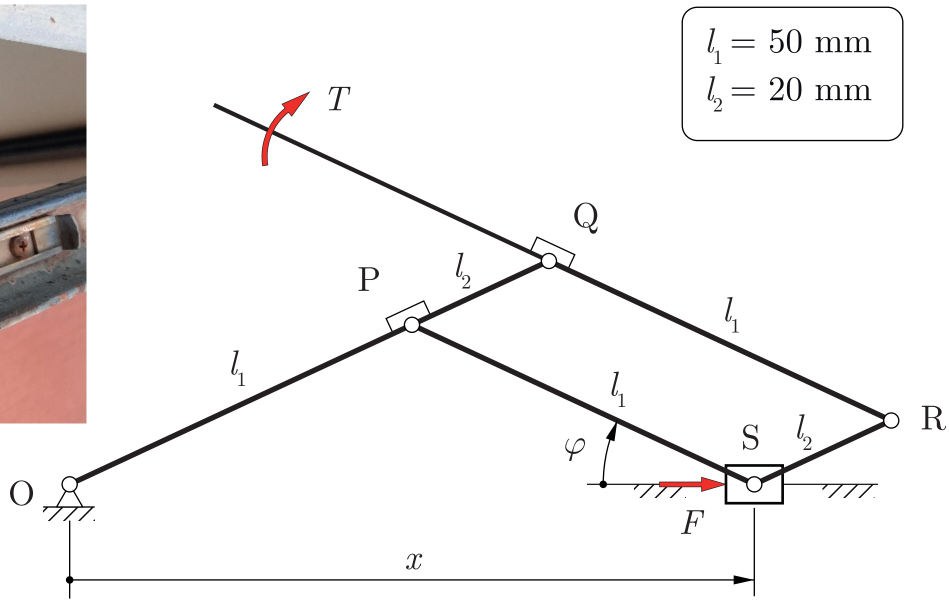
La fotografia mostra la plataforma on es dipositen les eines en un banc de treball per a la reparació de bicicletes.

La plataforma es manté en repòs gràcies al frec existent entre la columna de la base del banc i la plataforma.

a) Dibuixeu el diagrama de cos lliure de la plataforma. Especifiqueu clarament la hipòtesi realitzada que justifiqui el vostre diagrama (un diagrama sense la justificació adequada implica una valoració nul·la d'aquest apartat).

b) Determineu el mínim coeficient de frec, μ_{min}, entre la columna i la plataforma per tal que se'n pugui garantir l'estabilitat, segons la hipòtesi realitzada a l'apartat anterior.

Exercici 2 [4,5 punts]



Algunes de les finestres de l'ETSEIB disposen, en el pla horitzontal, del sistema de seguretat de la fotografia per tal d'evitar obertures o tancaments bruscos.

L'esquema simplificat de la figura mostra els paràmetres i les coordenades generalitzades per realitzar-ne una anàlisi cinemàtica i dinàmica. El marge de funcionament del mecanisme és $0^{\circ} \leq \varphi \leq 45^{\circ}$.

Determineu:

a) La relació entre les coordenades x i φ.

b) El centre instantani de rotació de la barra RQ respecte al terra.

Es realitza una anàlisi dinàmica simplificada en la qual es considera que les barres són d'inèrcia negligible i que l'única resistència a l'obertura de la finestra és la força F (representativa de les resistències passives de la corredora amb el marc de la finestra) indicada a la figura.

Determineu:

c) L'expressió del parell T aplicat a la barra QR quan s'obre la finestra. Feu-ne la gràfica, dins del rang de funcionament, suposant un valor unitari [1 N] per a la força F. La gràfica ha de contenir tots els elements necessaris per poder-la llegir correctament.

d) La força F_{R} a l'articulació R. Especifiqueu si la barra SR està sotmesa a tracció o a compressió.

Exercici 3 [3,5 punts]

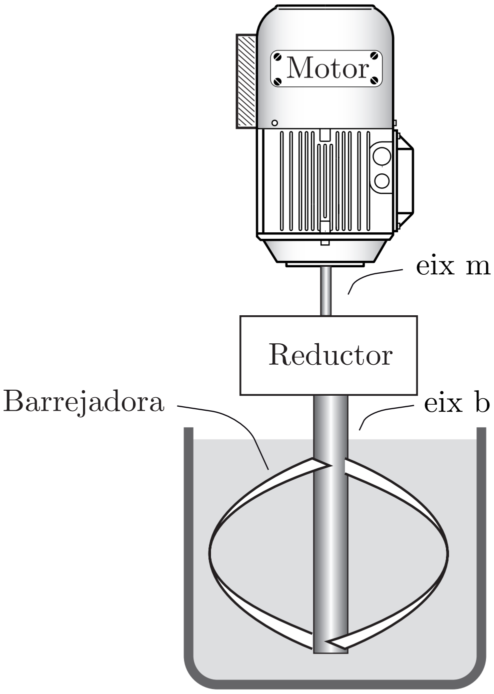


Figura (a)

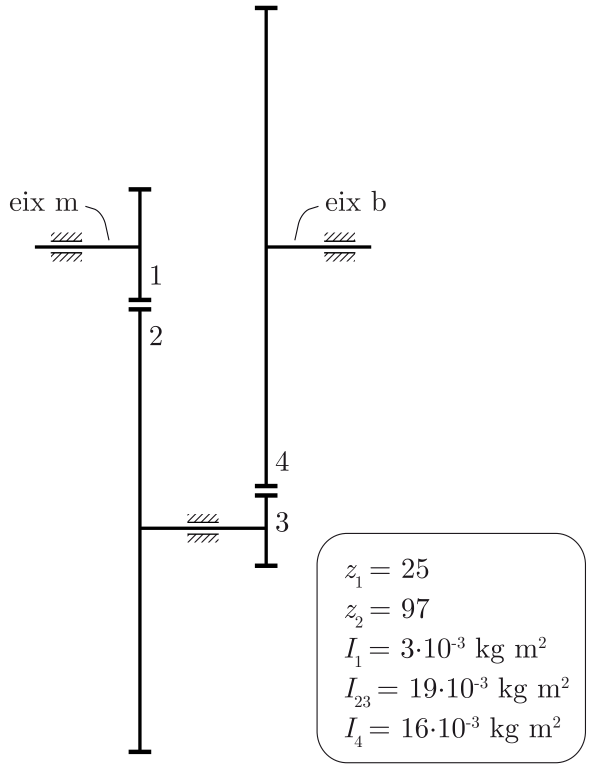


Figura (b)

L'esquema de la figura (a) correspon al d'una barrejadora de fluids industrial, accionada per un motor mitjançant un reductor de dues etapes les característiques del qual es mostren a la figura (b).

Les característiques dels components de la màquina, no indicades a les figures, són:

Motor:
- Rendiment electromecànic $\eta_{\text{e-m}} = 0{,}85$

Reductor:
- Relació de transmissió $\tau = \omega_\text{b}/\omega_\text{m} = 0{,}04$
- Rendiment $\eta_\text{r} = 0{,}7$

Barrejadora:
- Parell resistent reduït a l'eix b: $T_\text{rp} = T_\text{rp0} + c \cdot \omega_\text{b}$ amb $T_\text{rp0} = 400$ N·m i $c = 30$ N·m·s/rad
- Velocitat nominal $n_\text{b nom} = 60$ min^{-1}

Determineu.

a) La inèrcia del reductor, I_red, reduïda a la rotació de l'eix b.

b) La potència nominal, P_b, necessària a l'eix de la barrejadora.

c) El parell motor nominal, T_motor, en règim estacionari.

d) L'energia elèctrica, E_e, consumida en un temps $t = 2$ h.

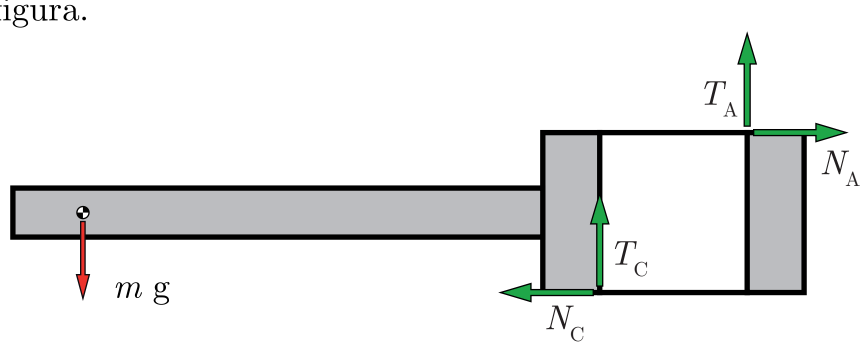
L'aturada de la màquina es realitza desconnectant el motor. Determineu:

e) L'expressió de l'acceleració de frenada, α_b, de l'eix b de la barrejadora.

Solució Exercici 1

a) La hipòtesi més adient per realitzar l'anàlisi del sistema és suposar que existeix joc entre la columna i la plataforma. L'existència de joc permet canviar fàcilment l'alçada de la plataforma portaeines per adaptar-la a la persona que l'utilitza.

Amb aquesta hipòtesi, els punts que entren en contacte entre la columna i la base són els punts A i C i per tant el diagrama de cos lliure de la plataforma és el que es mostra a la figura.



b) Per tal que la plataforma estigui en repòs cal que: $\sum F_{ext} = 0$ i $\sum M_{ext}(C) = 0$.

S'escull el punt C per simplicitat. Les equacions que s'obtenen són:

$$N_C - N_A = 0$$
$$T_A + T_C - m\,g = 0$$
$$N_A \cdot h - T_A \cdot d - m\,g \cdot s = 0$$

En el límit $T_A = \mu_{min} \cdot N_A$ i $T_C = \mu_{min} \cdot N_C$.

Amb les equacions obtingudes, s'arriba a un valor per al coeficient de frec mínim que evita el lliscament entre la plataforma i la columna de:

$\mu_{min} = \dfrac{h}{2\,s + d}$. Amb les mides proporcionades, el valor és $\mu_{min} = 0{,}1266$.

Solució Exercici 2

a) La relació entre les coordenades x i φ s'obté a partir del triangle isòsceles OPS:

$$x = 2\,l_1 \cos\varphi$$

b) Per a la resolució d'aquest apartat s'empra la nomenclatura següent:

Terra: sòlid 0; OQ: sòlid 1; PS: sòlid 2; SR: sòlid 3; QR: sòlid 4; corredora: sòlid 5.

Es coneix la direcció de la velocitat del punt Q, que és perpendicular a OQ. Per tant, el centre instantani de rotació del sòlid 4 respecte al terra, I_{40}, es troba sobre la recta OQ.

Per altra banda de la barra PS, se'n coneix la direcció de la velocitat de dos dels seus punts: el punt P i el punt S. Per tant, I_{20} es troba en la intersecció de la prolongació de la recta OQ amb la recta vertical que passa per S.

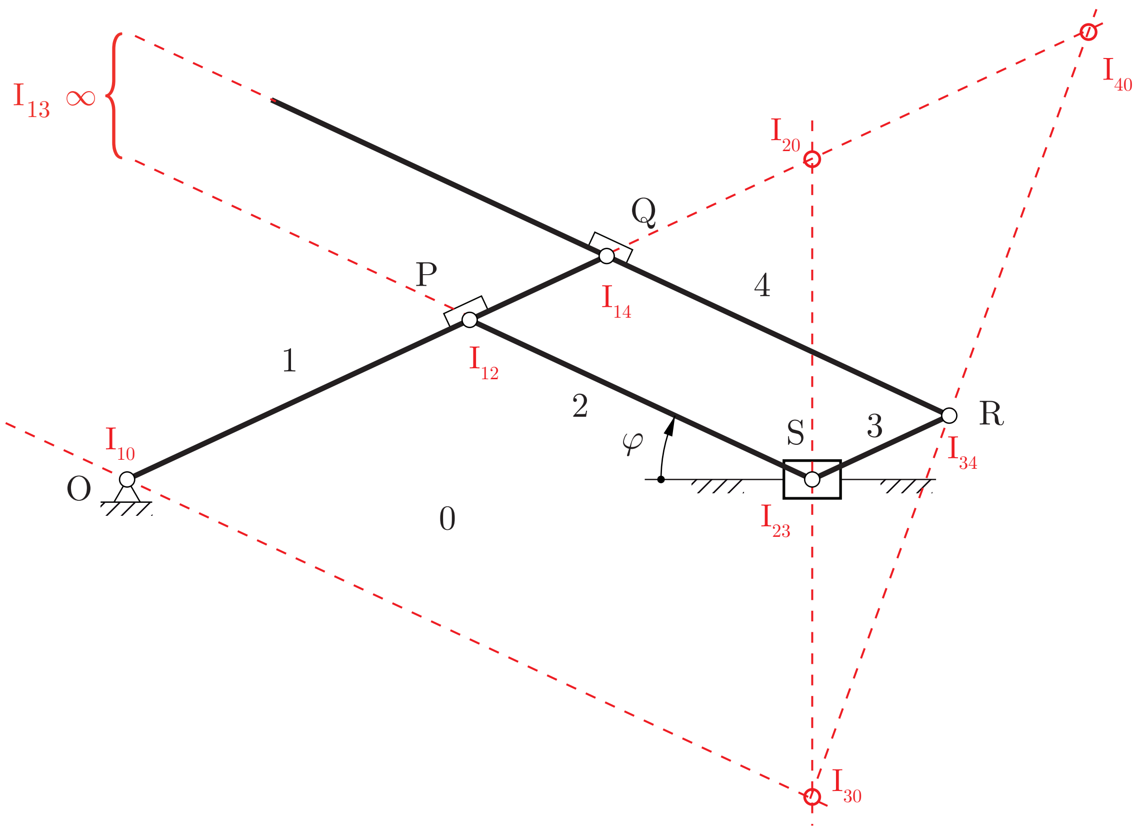
L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids 1, 3 i 0 indica que el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte al terra –I_{30}– es troba alineat amb I_{10} i amb I_{13}. El centre instantani I_{13} es troba a l'infinit intersecció de les rectes PS i QR. Per tant, I_{30} es troba sobre la recta paral·lela a PS que passa per O.

L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids 2, 3 i 0 indica que el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte al terra –I_{30}– es troba alineat amb I_{20} i amb I_{23}. El centre instantani I_{23} és el punt S.

Per tant, I_{30} és la intersecció entre a recta paral·lela a PS que passa per O i la recta vertical que passa per S.

L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids 3, 4 i 0 indica que el centre instantani de rotació de la barra 4 respecte al terra –I_{40}– es troba alineat amb I_{30} i amb I_{34}. El centre instantani I_{34} és el punt R.

Finalment, I_{40} es troba en la intersecció de la prolongació de la recta OQ amb la recta que uneix I_{30} i el punt R (veure la figura adjunta).



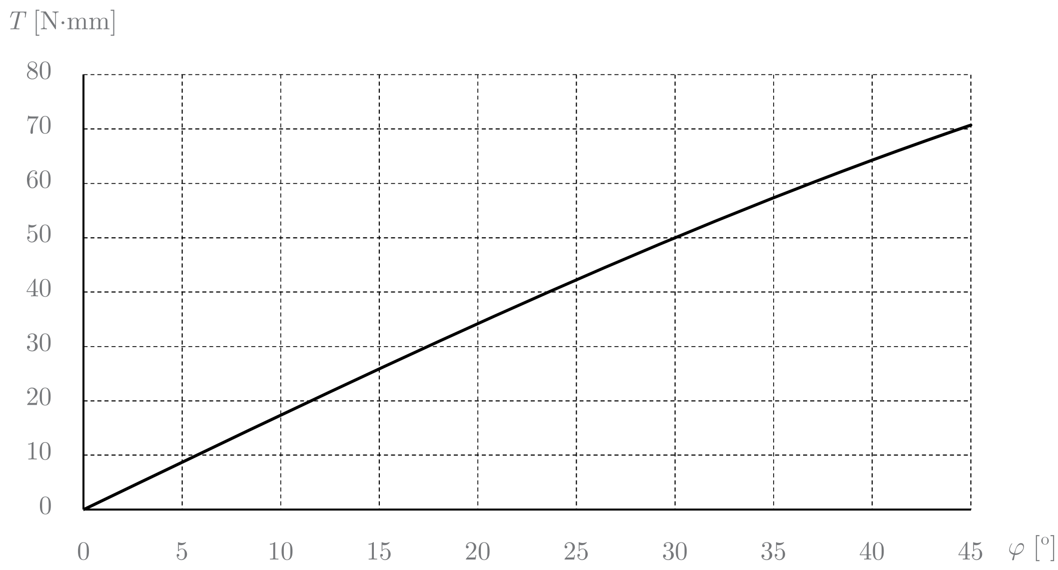
c) Per determinar el parell T aplicat a la barra QR quan s'obre la finestra es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals. Es pren com a sistema tot el mecanisme i es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \quad \rightarrow \quad T\,\dot{\varphi}^* + F\,\dot{x}^* = 0$$

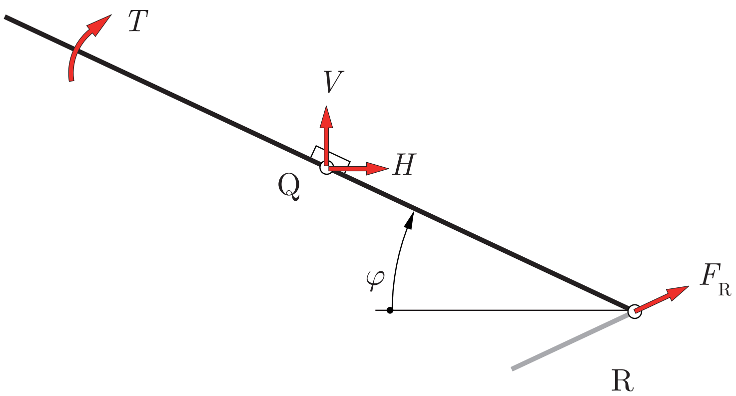
La relació entre les velocitats virtuals $\dot{x}^*$ i $\dot{\varphi}^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant, a partir de la relació entre les coordenades x i φ de l'apartat *a*), s'obté:

$$\dot{x}^* = -2\,l_1\,\dot{\varphi}^*\sin\varphi \;\rightarrow \qquad T = F\,2\,l_1\sin\varphi\,.$$

El gràfic del parell T dins del marge de funcionament és el mostrat a la figura.



d) Amb les hipòtesis realitzades, la força que transmet la barra SR té la direcció de la pròpia barra. Per tant, el diagrama de cos lliure del sòlid QR és el mostrat a la figura.



L'aplicació del teorema del moment cinètic al punt Q condueix a:

$$\sum_{\text{QR}} \boldsymbol{M}_{\text{ext}}(\text{Q}) = 0$$

$$T - F_{\text{R}}\,l_1\sin\left(2\varphi\right) = 0$$

Finalment, $F_{\text{R}} = T\Big/\Big(l_1\sin(2\varphi)\Big)$.

En el marge de funcionament del mecanisme i amb el moviment d'obertura analitzat, F_{R} és positiva. En conseqüència, la barra SR està sotmesa a compressió.

Solució Exercici 3

a) La inèrcia del reductor, I_{red}, reduïda a la rotació de l'eix b s'obté per identificació en el càlcul de l'energia cinètica.

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_1 \, \omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} I_{23} \, \omega_{23}^2 + \frac{1}{2} I_4 \, \omega_4^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{\tau^2} + \frac{I_{23}}{\tau_2^2} + I_4\right)\omega_{\mathrm{b}}^2$$

El valor de la relació de transmissió τ_2 és el corresponent al de la segona etapa del reductor. Es pot obtenir a partir del valor de la relació de transmissió τ de tot el reductor i del valor de la relació de transmissió de la primera etapa.

$$\tau_1 = -\frac{z_1}{z_2}; \quad \tau_1 \cdot \tau_2 = \tau$$

Finalment, $I_{\mathrm{red}} = 2{,}68\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

b) La potència nominal, P_{b}, a l'eix de la barrejadora és la necessària per vèncer el parell resistent, T_{rp}, en aquest eix quan gira a la velocitat nominal.

$$P_{\mathrm{b}} = T_{\mathrm{rp}} \cdot \omega_{\mathrm{b\ nom}} = \left(T_{\mathrm{rp0}} + c \cdot \omega_{\mathrm{b\ nom}}\right)\omega_{\mathrm{b\ nom}} = 3{,}697\ \mathrm{kW}.$$

c) L'aplicació del principi de conservació de l'energia al reductor funcionant en règim estacionari condueix a:

$$P_{\mathrm{subministrada}} = P_{\mathrm{cedida}} = P_{\mathrm{dissipada}} + P_{\mathrm{útil}}$$

$$P_{\mathrm{motor}} = P_{\mathrm{motor}}(1-\eta_{\mathrm{r}}) + P_{\mathrm{b}} \;\rightarrow\; P_{\mathrm{motor}}\,\eta_{\mathrm{r}} = P_{\mathrm{b}} \;\rightarrow\; T_{\mathrm{motor}} \cdot \omega_{\mathrm{motor}} \cdot \eta_{\mathrm{r}} = P_{\mathrm{b}}.$$

Finalment, $T_{\mathrm{motor}} = 33{,}63\ \mathrm{N{\cdot}m}$.

d) L'energia elèctrica, E_{elec}, consumida en $t = 2$ h es determina a partir de la potència elèctrica.

$$P_{\mathrm{e}} = \frac{P_{\mathrm{motor}}}{\eta_{\mathrm{e\text{-}m}}} = \frac{T_{\mathrm{motor}} \cdot \omega_{\mathrm{motor}}}{\eta_{\mathrm{e\text{-}m}}} = \frac{T_{\mathrm{motor}} \cdot \omega_{\mathrm{b\ nom}}}{\eta_{\mathrm{e\text{-}m}} \cdot \tau} = 6{,}215\ \mathrm{kW}$$

$$E_{\mathrm{e}} = P_{\mathrm{e}} \cdot t = 12{,}43\ \mathrm{kW{\cdot}h}.$$

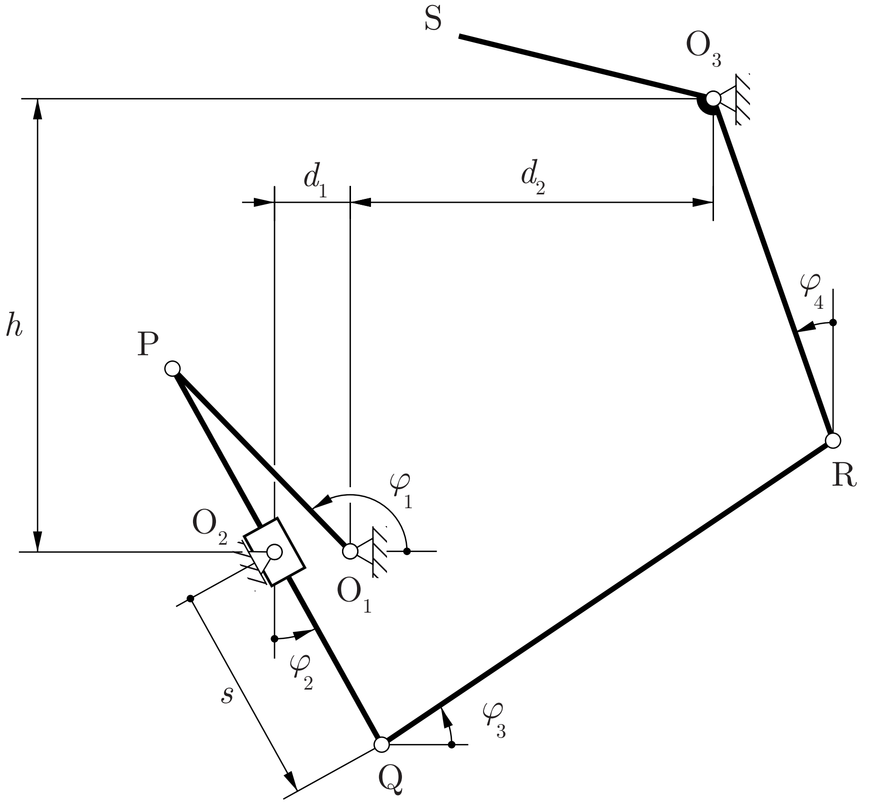
e) L'aplicació del principi de conservació de l'energia al reductor durant l'aturada condueix a:

$$P_{\mathrm{subministrada}} = P_{\mathrm{acumulada}} + P_{\mathrm{cedida}}$$

$$0 = \dot{E}_{\mathrm{c}} + P_{\mathrm{rp}} = I_{\mathrm{red}} \cdot \omega_{\mathrm{b}} \cdot \alpha_{\mathrm{b}} + T_{\mathrm{rp}} \cdot \omega_{\mathrm{b}} \quad\rightarrow\quad \alpha_{\mathrm{b}} = -\frac{T_{\mathrm{rp}}}{I_{\mathrm{red}}} = -\frac{T_{\mathrm{rp0}} + c \cdot \omega_{\mathrm{b}}}{I_{\mathrm{red}}}$$

– Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
– Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
– Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
– A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [**6 punts**]



$|O_1P| = l_1 = 225$ mm
$|PQ| = l_2 = 380$ mm
$|QR| = l_3 = 480$ mm
$|O_3R| = l_4 = 340$ mm
$d_1 = 70$ mm
$d_2 = 320$ mm
$h = 400$ mm

El mecanisme de la figura s'acciona a través d'un motor i un tren d'engranatges, no representants, que fan girar la barra O_1P. La palanca SR té un moviment oscil·latori. Per realitzar l'anàlisi cinemàtica del mecanisme, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

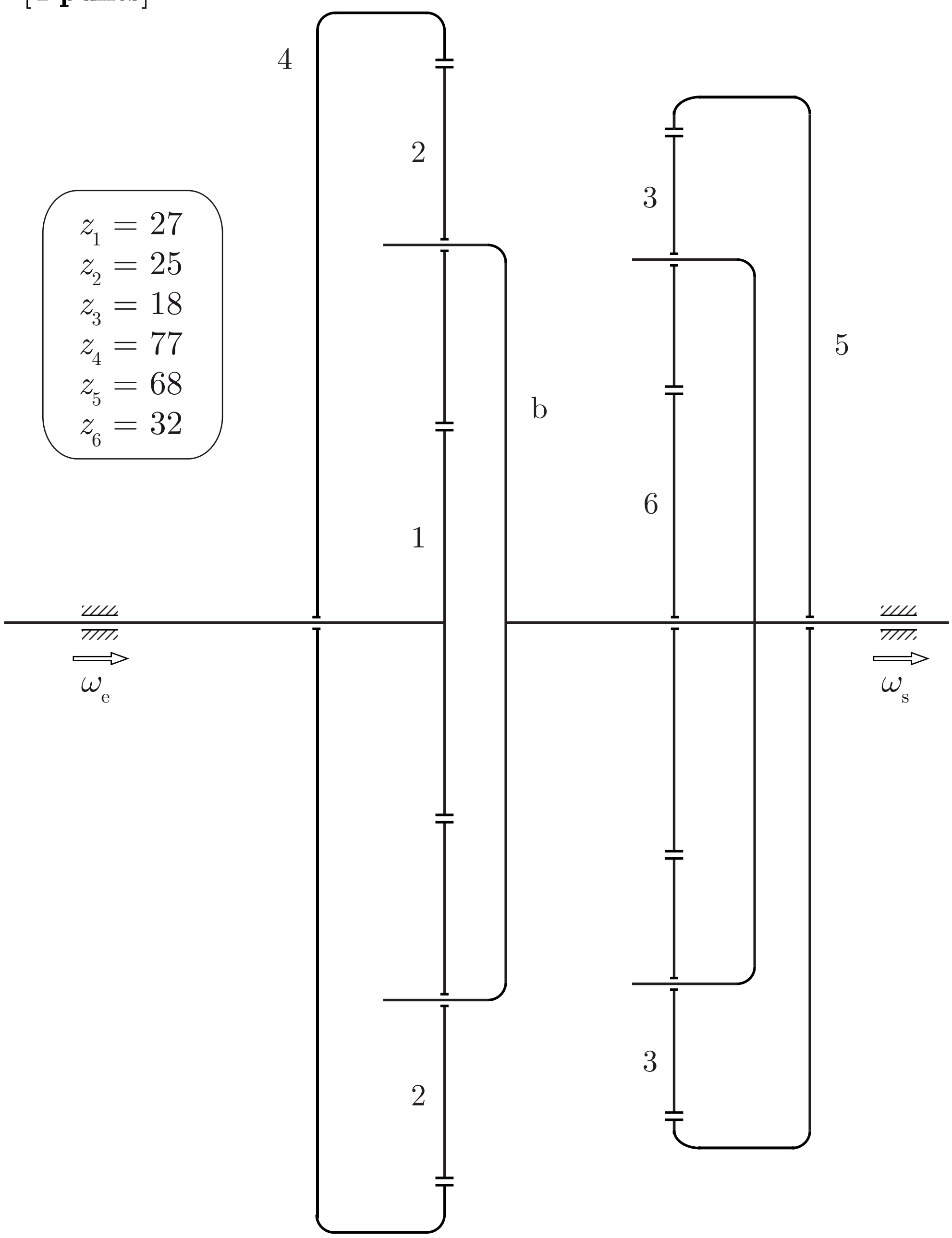
b) Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi_q}$.

c) Els centres instantanis de rotació I_{PQ} i I_{QR} de les bieles PQ i QR respecte el terra.

d) Els valors s_{max} i s_{min} de la coordenada s.

e) La relació de velocitats $\dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_1$ en la configuració de punt mort corresponent al màxim de la coordenada s.

Exercici 2 [4 punts]



Per a l'estudi del tren d'engranatges de la figura s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_b\}^T$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges. Justifiqueu la vostra resposta.

b) Les equacions cinemàtiques d'enllaç entre les velocitats generalitzades.

Si es fixa la roda 4 i $\omega_1 = 1$ rad/s, determineu:

c) La velocitat angular ω_s.

d) La velocitat angular ω_5, si $\omega_6 = 0$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la rotació de la corredora O_2 el punt P queda aturat; la barra PQ només podria lliscar per l'interior de la corredora la qual cosa és incompatible amb el moviment que li correspondria al punt P com a punt de la barra O_1P. En conseqüència, el punt Q queda aturat per pertànyer al sòlid PQ. Amb el punt Q quiet, es forma un triangle indeformable O_3QR i el mecanisme queda totalment aturat. Per tant, el mecanisme té 1 grau de llibertat ja que aturant una única velocitat queda en repòs.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübler–Kutzbach) dona un número igual a 1.

$5(\text{sòlids mòbils})\times 3 - 6(\text{articulacions})\times 2 - 1(\text{p. prismàtic})\times 2 = 1.$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent, cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que es poden obtenir, per exemple, imposant el tancament dels anells $O_1PO_2O_1$ i $O_1PQRO_3O_1$.

$$\begin{cases} l_1\cos\varphi_1 + \left(l_2 - s\right)\sin\varphi_2 + d_1 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - \left(l_2 - s\right)\cos\varphi_2 = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - l_4\sin\varphi_4 - d_2 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 + l_4\cos\varphi_4 - h = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = 0$$

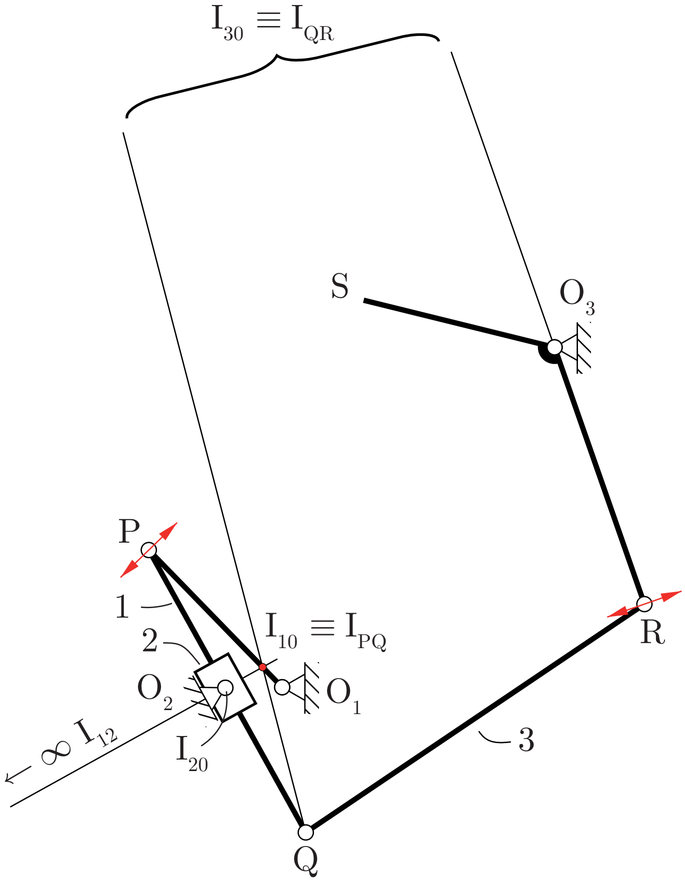
La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & \left(l_2 - s\right)\cos\varphi_2 & 0 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ l_1\cos\varphi_1 & \left(l_2 - s\right)\sin\varphi_2 & 0 & 0 & \cos\varphi_2 \\ -l_1\sin\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 & -l_4\cos\varphi_4 & 0 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\sin\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 & -l_4\sin\varphi_4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) El centre instantani de rotació de la biela PQ –I_{PQ}– es pot determinar sabent que el punt P té velocitat perpendicular a la recta O_1P.

El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, biela PQ –1– i corredora –2– indica que el centre instantani de rotació I_{PQ} de la biela PQ respecte el terra es troba sobre la recta perpendicular a PQ que passa per O_2.

Així doncs, el centre instantani de rotació I_{PQ} de la biela PQ es troba a la intersecció de la prolongació de la recta O_1P amb la recta perpendicular a PQ que passa per O_2, tal com mostra la figura.



El centre instantani de rotació de la biela QR es pot determinar sabent que el punt R té velocitat perpendicular a la recta O_3R. El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, biela PQ –1– i biela QR –3– indica que el centre instantani de rotació I_{QR} de la biela QR respecte el terra es troba sobre la recta que uneix els punts I_{PQ} i Q.

Així doncs, el punt I_{QR} es troba a la intersecció de la prolongació de la recta O_3R amb la recta que uneix els punts I_{PQ} i Q, tal com mostra la figura.

d) Si es pren com a referència relativa la corredora O_2 la velocitat del punt P es pot expressar com:

$\boldsymbol{v}_{\text{Abs}}(\text{P}) = \boldsymbol{v}_{\text{Rel}}(\text{P}) + \boldsymbol{v}_{\text{arr}}(\text{P})$. $\boldsymbol{v}_{\text{Rel}}(\text{P})$ correspon al lliscament dins de la corredora i $\boldsymbol{v}_{\text{arr}}(\text{P})$ correspon a realitzar una rotació entorn del punt O_2.

En les configuracions de punt mort de la coordenada s, $\boldsymbol{v}_{\text{Rel}}(\text{P}) = 0$ i, per tant, $\boldsymbol{v}_{\text{Abs}}(\text{P}) = \boldsymbol{v}_{\text{arr}}(\text{P})$.

En la configuració de s_{max} els punts P, O_2, O_1 i Q estan alineats i en aquest ordre. Per tant: $s_{\text{max}} = l_2 - (l_1 - d_1) = 225$ mm.

En la configuració de s_{min} els punts Q, O_2, O_1 i P estan alineats i en aquest ordre. Per tant: $s_{\text{min}} = (l_2 - (l_1 + d_1)) = 85$ mm.

e) En la configuració on s és màxima $\dot{s} = 0$. Per tant, $\boldsymbol{v}_{\text{Abs}}(\text{P}) = \boldsymbol{v}_{\text{arr}}(\text{P})$.

La velocitat absoluta del punt P com a punt de la barra O_1P és $v_{\text{Abs}}(\text{P}) = l_1\,\dot{\varphi}_1$ i la velocitat d'arrossegament del punt P és $v_{\text{arr}}(\text{P}) = \left(l_2 - s_{\text{max}}\right)\dot{\varphi}_2$. Per tant:

$$l_1\,\dot{\varphi}_1 = \left(l_2 - s_{\text{max}}\right)\dot{\varphi}_2 \quad \rightarrow \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = \frac{l_1}{l_2 - s_{\text{max}}} = 1{,}452.$$

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per dos trens epicicloidals simples:

– Tren 1: 1 (planeta), 2 (satèl·lit), 4 (corona) i b1 (braç)
– Tren 2: 6 (planeta), 3 (satèl·lit), 5 (corona) i b2 (braç).

Cada tren epicicloidal simple té 2 graus de llibertat. En la unió dels dos trens, s'iguala únicament la velocitat angular dels dos braços. Per tant, el nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges és 3.

b) Per a cadascun del trens es pot determinar l'equació que relaciona les velocitats angulars dels elements que giren entorn de l'eix fix, des de la referència fixa al braç corresponent (equació de Willis).

Si en el primer tren es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 4 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{4/\text{b1}}}{\omega_{1/\text{b1}}} = \frac{\omega_4 - \omega_{\text{b1}}}{\omega_1 - \omega_{\text{b1}}} \quad \rightarrow \quad \tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\text{b1}} - \omega_4 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_1 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_4} = -\frac{27}{77} = -0{,}3506.$$

Si en el segon tren es pren com a entrada la roda 6 i com a sortida la roda 5 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{5/\text{b2}}}{\omega_{6/\text{b2}}} = \frac{\omega_5 - \omega_{\text{b2}}}{\omega_6 - \omega_{\text{b2}}} \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_6 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\text{b2}} - \omega_5 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_6 \cdot z_3}{z_3 \cdot z_5} = -\frac{8}{17} = -0{,}4706.$$

La unió dels dos trens fa que els braços b1 i b2 siguin solidaris: $\omega_{\text{b1}} = \omega_{\text{b2}} = \omega_{\text{b}}$. En conseqüència es pot escriure:

$$\tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\text{b}} - \omega_4 = 0 \qquad [1]$$
$$\tau_2\,\omega_6 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\text{b}} - \omega_5 = 0 \qquad [2]$$

L'eix d'entrada del tren epicicloidal compost és el corresponent al de la roda 1, $\omega_{\text{e}} = \omega_1$, i l'eix de sortida és el corresponent al de del braç $\omega_{\text{s}} = \omega_{\text{b}}$.

c) Si es fixa la roda 4, $\omega_4 = 0$, el tren epicicloidal compost passa a tenir 2 graus de llibertat. Si es fixa $\omega_1 = 1$ rad/s es pot determinar ω_s a partir de l'equació [1]:

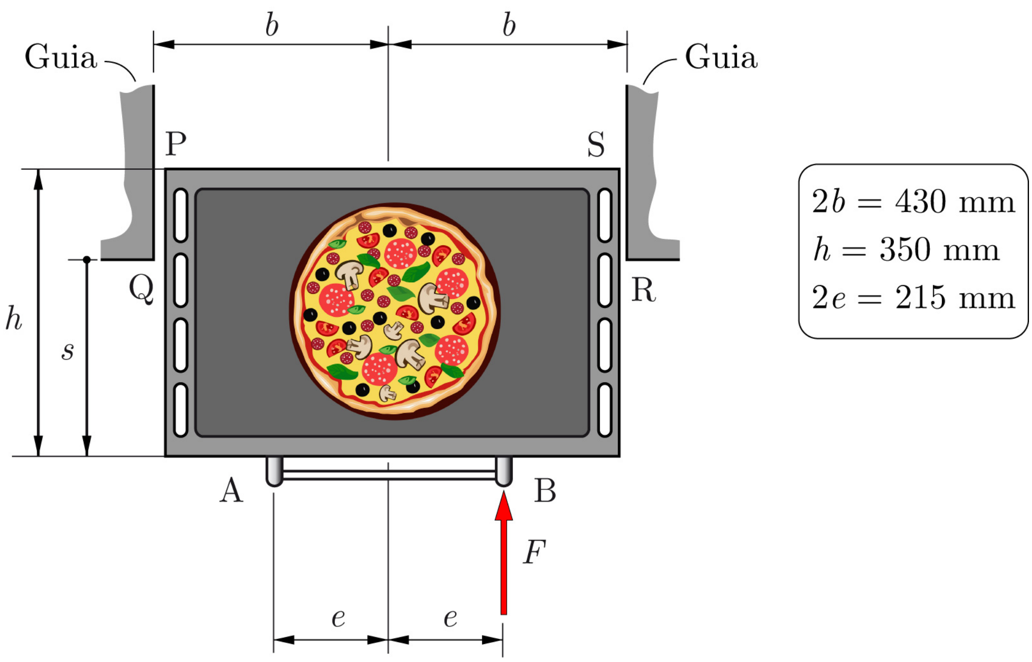
$$\omega_\mathrm{s} = \omega_\mathrm{b} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - 1} = \frac{27}{104} = 0{,}2596 \text{ rad/s.}$$

d) Si a més es fixa la roda 6, $\omega_6 = 0$, a partir de l'equació [2]:

$$\omega_5 = \left(1 - \tau_2\right)\omega_\mathrm{b} = \frac{675}{1768} = 0{,}3818 \text{ rad/s.}$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [2,5 punts]



La safata de la figura s'introdueix i s'extreu d'un forn domèstic mitjançant les guies que hi ha a les parets verticals.

Entre la safata i les parets del forn el frec no és negligible.

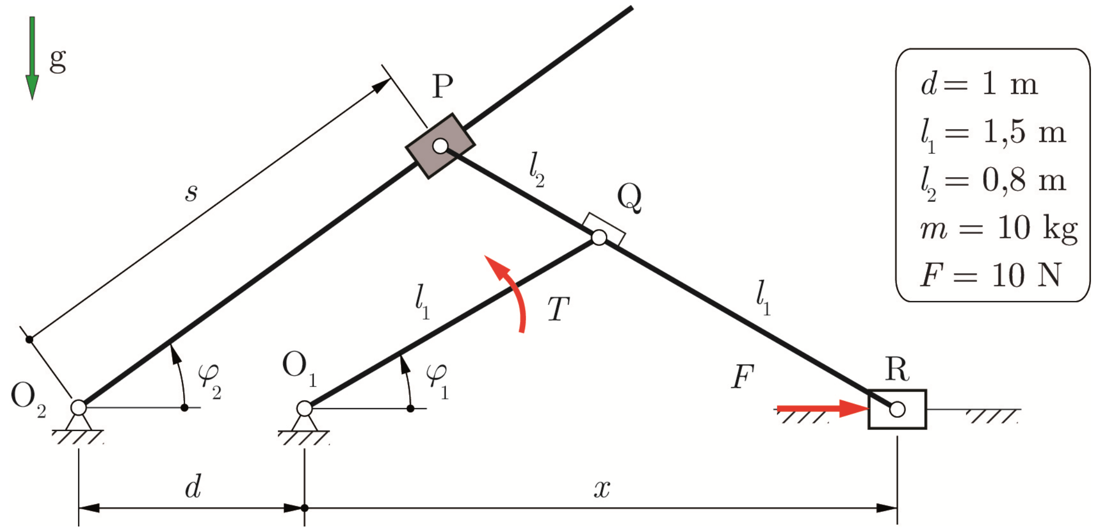
La distribució no uniforme del menjar sobre la safata implica que es realitza una força F major en el punt B que en el punt A.

a) Justifiqueu i especifiqueu les hipòtesis que emprareu per resoldre el problema.

b) Dibuixeu el diagrama de cos lliure de la safata.

c) Determineu el coeficient de frec màxim μ_{max} entre la safata i les parets del forn que permet introduir-hi la safata quan $s = 250$ mm.

Exercici 2 [3,5 punts]



El mecanisme de la figura és accionat per un motor que controla l'angle φ_1. La massa de tots els elements es considera negligible, excepte la de la corredora P, que és m. Els frecs es consideren negligibles.

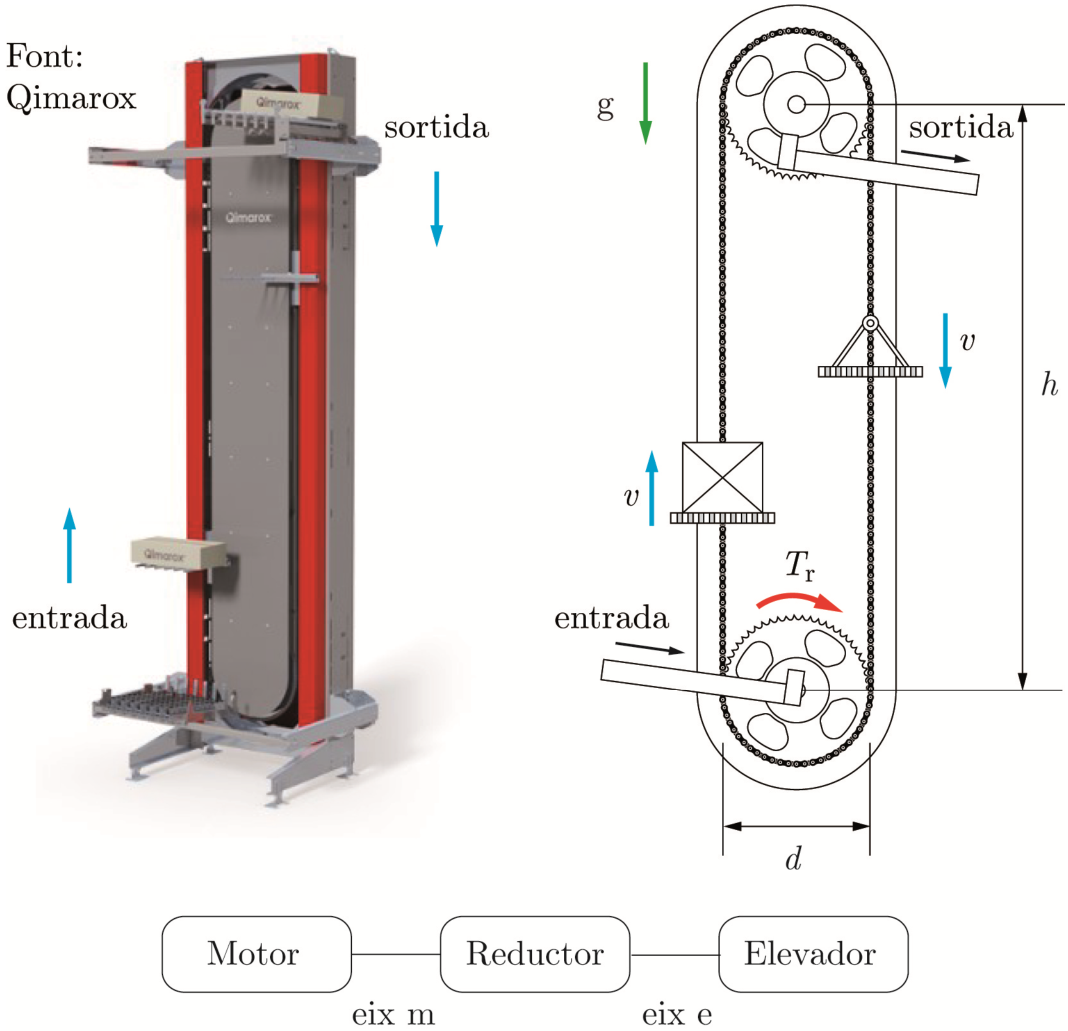
Per al seu estudi cinemàtic i dinàmic, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, x, s\}^\mathrm{T}$. Determineu:

a) Les equacions geomètriques d'enllaç entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

b) El centre instantani de rotació de la corredora P respecte al terra.

c) L'expressió del parell T que ha de realitzar el motor per mantenir el sistema en equilibri quan sobre la corredora R hi actua la força F indicada. Determineu-ne el valor quan $\varphi_1 = 45^\mathrm{o}$.

Exercici 3 [4 punts]



La figura mostra la fotografia i l'esquema d'un elevador vertical de paquets de funcionament continu en un magatzem automatitzat (Font: Qimarox).

L'elevador funciona mitjançant una cadena muntada sobre dues rodes dentades i dues safates arrossegades per la cadena i guiades per tal que es mantinguin horitzontals.

Les safates s'articulen a punts oposats de la cadena, de manera que mentre una puja l'altra baixa. Tant l'entrada com la sortida de paquets es produeix per gravetat, mitjançant un transportador de rodets (no mostrat).

El ritme al qual arriben els paquets és suficient per garantir que en tot moment hi ha un paquet que està pujant.

La inèrcia de l'elevador és suficient per garantir que l'entrada i la sortida dels paquets no fa variar la velocitat de funcionament.

Les característiques del sistema són:

Motor:
- Velocitat nominal: $n_{\mathrm{nom}} = 920\ \mathrm{min}^{-1}$
- Parell nominal: $T_{\mathrm{nom}} = 7{,}8\ \mathrm{N{\cdot}m}$
- Inèrcia reduïda al seu eix: $I_{\mathrm{motor}} = 2{,}92{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$

Reductor:
- Inèrcia reduïda a l'eix m: $I_{\mathrm{red}} = 4{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$

Elevador:
- Diàmetre de les rodes dentades: $d = 0{,}8$ m
- Distància entre centres: $h = 4$ m
- Velocitat nominal d'elevació: $v = 0{,}9$ m/s
- Densitat lineal de la cadena: $\lambda = 0{,}41$ kg/m
- Inèrcia de cada roda respecte al seu eix: $I_{\mathrm{roda}} = 0{,}25\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$
- Massa de cada safata: $m_{\mathrm{s}} = 3{,}8$ kg
- Càrrega nominal per safata: $m_{\mathrm{p}} = 35$ kg
- Resistències passives reduïdes a l'eix m: $T_{\mathrm{rp}} = 2{,}5\ \mathrm{N{\cdot}m}$

Si es suposa que el motor gira a velocitat nominal, determineu:

a) La massa de la cadena, m_{c}, i la relació de transmissió $\tau = \omega_{\mathrm{e}}/\omega_{\mathrm{m}}$

b) La inèrcia de tot el sistema reduïda a l'eix del motor, I, quan no s'eleva cap càrrega.

c) El valor del parell motor necessari, T_{m}, per elevar un paquet.

d) La massa màxima dels paquets, m_{max}, que podria admetre l'elevador si el motor sempre proporcionés el parell nominal T_{nom}.

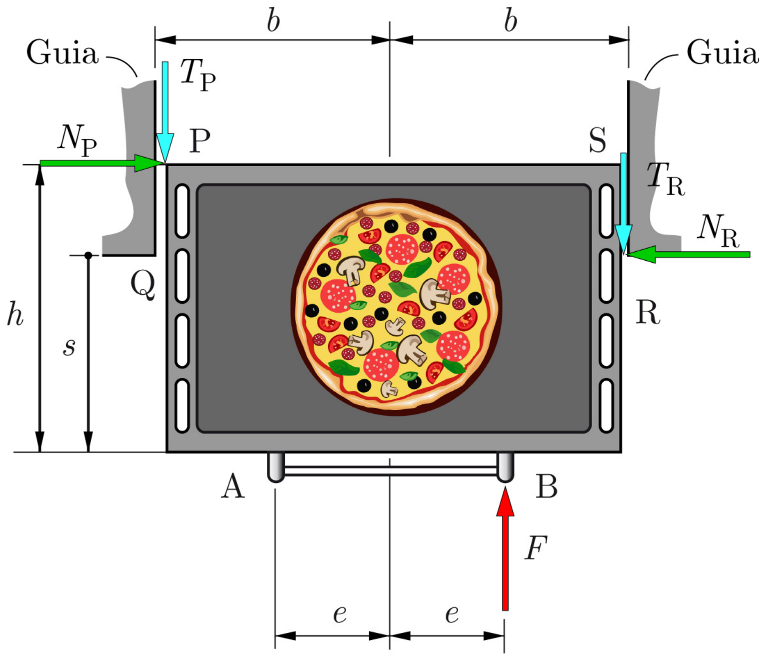
e) El temps d'aturada, t_{a}, del tot el sistema si es desconnecta el motor quan no transporta cap paquet.

Solució Exercici 1

a) La hipòtesi més adequada per resoldre el problema és suposar que entre la safata i les guies del forn hi ha joc.

b) Si entre les superfícies d'un contacte multipuntual hi ha joc el contacte es produeix en els punts que les forces exteriors, que no són d'enllaç, posen en contacte. La força F tendeix a fer girar la safata en sentit antihorari de manera que els punts que es poden en contacte són el P i l'R.

La figura mostra el diagrama de cos lliure de la safata amb $T \leq \mu N$ segons no llisqui, llisqui o estigui en condicions de lliscament imminent.



L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment a la safata porta a:

$$\sum_{\text{safata}} \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} N_{\text{P}} - N_{\text{R}} = 0 \\ T_{\text{P}} + T_{\text{R}} - F = 0 \end{cases}$$

L'aplicació del teorema del moment cinètic al punt R porta a:

$$\sum_{\text{safata}} \boldsymbol{M}_{\text{ext}}(\text{R}) = 0 \;\rightarrow\; F\left(b-e\right) + N_{\text{P}}\left(h-s\right) - T_{\text{P}}\, 2b = 0$$

En condicions de lliscament imminent $T_{\text{P}} = \mu\, N_{\text{P}}$ i $T_{\text{R}} = \mu\, N_{\text{R}}$, per tant:

$$2\,\mu N_{\text{P}}\left(b-e\right) + N_{\text{P}}\left(h-s\right) - \mu N_{\text{P}}\, 2b = 0 \;\rightarrow\; \mu = \frac{h-s}{2\,e} = 0,4651.$$

Solució Exercici 2

a) El mecanisme té un grau de llibertat. Per tant, calen 3 equacions geomètriques d'enllaç. Dues es poden trobar, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell O_2PRO_2 i la tercera a partir de l'anell O_1QRO_1.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} s\cos\varphi_2 + \left(l_1 + l_2\right)\cos\varphi_1 - x - d = 0 \\ s\sin\varphi_2 - \left(l_1 + l_2\right)\sin\varphi_1 = 0 \\ x - 2\,l_1\cos\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

La matriu jacobiana és en aquest cas:

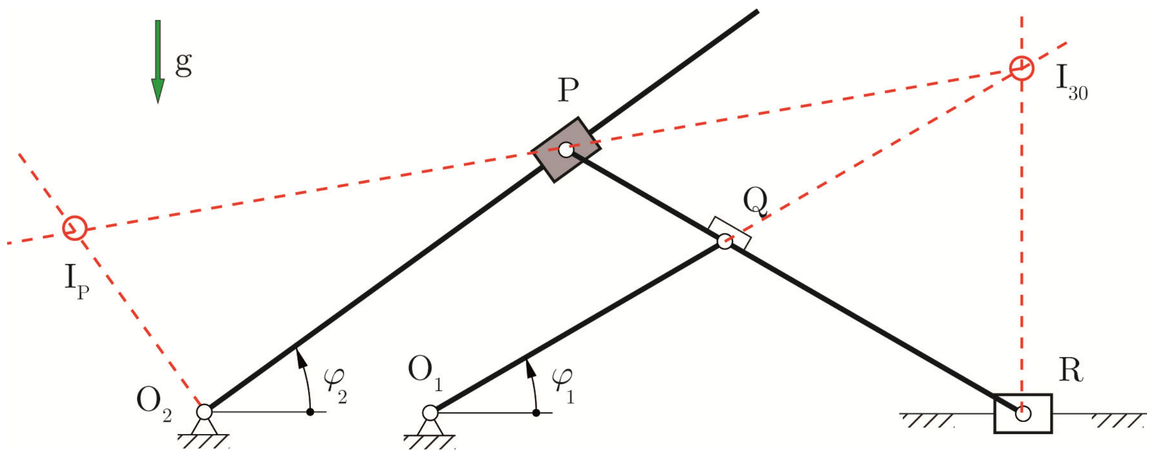
$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -\left(l_1 + l_2\right)\sin\varphi_1 & -s\sin\varphi_2 & -1 & \cos\varphi_2 \\ -\left(l_1 + l_2\right)\cos\varphi_1 & s\cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ 2\,l_1\sin\varphi_1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, guia de la corredora P –1– i corredora P –2– indica que el centre instantani de rotació I_P de la corredora P respecte el terra es troba sobre la recta perpendicular a la guia que passa per O_2.

El centre instantani de rotació de la biela PQR –I_{30}–es troba en la intersecció de la prolongació de la barra O_1Q i la vertical que passa per R.

El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, biela PQR –3– i corredora P –2– indica que el centre instantani de rotació I_P de la corredora P respecte el terra es troba sobre la recta que uneix I_{30} amb el punt P.

Així doncs, el centre instantani de rotació de la corredora P respecte el terra es troba en la intersecció de la recta perpendicular a la guia que passa per O_2 i la recta que uneix I_{30} amb el punt P, com mostra la figura adjunta.



c) Per determinar el parell T_{m} que ha de realitzar el motor per mantenir el sistema en equilibri, es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema tot el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \;\rightarrow\; T\,\dot{\varphi}_1^* + F\,\dot{x}^* - m\,g\,v_{\mathrm{v}}^* = 0, \text{ essent } v_{\mathrm{v}}^* \text{ la velocitat vertical de P.}$$

El valor de $\dot{x}^*$ i de la velocitat vertical de P es poden trobar a partir de les equacions geomètriques d'enllaç: $\dot{x}^* = -\dot{\varphi}_1^* 2\,l_1 \sin\varphi_1$ i $v_{\mathrm{v}}^* = \dot{\varphi}_1^*\left(l_1 + l_2\right)\cos\varphi_1$. Així doncs,

$$T\,\dot{\varphi}_1^* - F\,\dot{\varphi}_1^*\,2\;l_1 \sin\varphi_1 - m\,g\,\dot{\varphi}_1^*\left(l_1 + l_2\right)\cos\varphi_1 = 0$$

$$T = F\,2\;l_1 \sin\varphi_1 + m\,g\,\left(l_1 + l_2\right)\cos\varphi_1$$

Per a la configuració demanada, $T = 180{,}7$ N·m.

Solució Exercici 3

a) La massa m_{c} de la cadena es determina a partir de la seva densitat lineal i la llargada.

$$m_c = \lambda\cdot L = \lambda\left(2\,h + 2\,\pi\,r\right) = 4{,}31 \text{ kg.}$$

La relació de transmissió es calcula a partir de la velocitat angular del motor i la velocitat d'elevació.

$$\tau = \frac{\omega_{\mathrm{e}}}{\omega_{\mathrm{m}}} = \frac{v\;60}{r\;n_{\mathrm{nom}}\,2\pi} = 23{,}35 \cdot 10^{-3}.$$

b) La inèrcia reduïda I de tot el sistema quan no s'eleva cap càrrega es determina a partir del càlcul de l'energia cinètica.

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{m}}^2 + 2\frac{1}{2} I_{\mathrm{roda}}\omega_{\mathrm{e}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{c}} v^2 + 2\frac{1}{2} m_{\mathrm{s}} v^2$$
$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\left(I_{\mathrm{m}} + I_{\mathrm{r}}\right)\omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} 2 I_{\mathrm{roda}}\tau^2\omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{c}} + 2m_{\mathrm{s}}\right) r^2\tau^2\omega_{\mathrm{m}}^2$$

$$I = I_{\mathrm{m}} + I_{\mathrm{r}} + 2I_{\mathrm{roda}}\tau^2 + \left(m_{\mathrm{c}} + 2m_{\mathrm{s}}\right) r^2\tau^2 = 8{,}232 \text{ g·m}^2$$

c) El parell motor necessari per elevar un paquet es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema reductor + elevador:

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \;\rightarrow\; P_{\text{mot}} = P_{\text{rp}} + \dot{E}_{\text{p}}$$

$$T_{\text{m}}\omega_{\text{m}} = T_{\text{rp}}\omega_{\text{m}} + m_{\text{p}}\, g\, v \qquad \rightarrow \qquad T_{\text{m}} = T_{\text{rp}} + m_{\text{p}}\, g\, r\, \tau = 5{,}706\ \text{N·m}$$

d) Per determinar la massa màxima dels paquets, m_{max}, es pot repetir el procés de l'apartat anterior però suposant que el valor del parell és el nominal.

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \;\rightarrow\; P_{\text{mot}} = P_{\text{rp}} + \dot{E}_{\text{p}}$$

$$T_{\text{nom}}\omega_{\text{m}} = T_{\text{rp}}\omega_{\text{m}} + m_{\text{max}}\, g\, v \;\rightarrow\; T_{\text{nom}} = T_{\text{rp}} + m_{\text{max}}\, g\, r\, \tau$$

$$m_{\text{max}} = \frac{T_{\text{nom}} - T_{\text{rp}}}{g\, r\, \tau} = 57{,}85\ \text{kg}$$

e) L'aplicació del principi de conservació de l'energia a tot el sistema quan es desconnecta el motor i no es transporta cap paquet permet determinar l'acceleració de frenada.

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \;\rightarrow\; 0 = P_{\text{rp}} + \dot{E}_{\text{c}}$$

$$0 = T_{\text{rp}}\omega_{\text{m}} + I\alpha_{\text{m}}\omega_{\text{m}} \qquad \rightarrow \; \alpha_{\text{m}} = -\frac{T_{\text{rp}}}{I} = -303{,}7\ \text{rad/s}^2.$$

Com que l'acceleració és constant, el moviment de frenada és uniformement desaccelerat i, per tant, el temps d'aturada és:

$$t_{\text{a}} = -\frac{\omega_{\text{nom}}}{\alpha_{\text{m}}} = 0{,}3172\ \text{s}.$$