Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Teoria de Màquines i Mecanismes

Exàmens Curs 2020-2021

Lluïsa Jordi Nebot

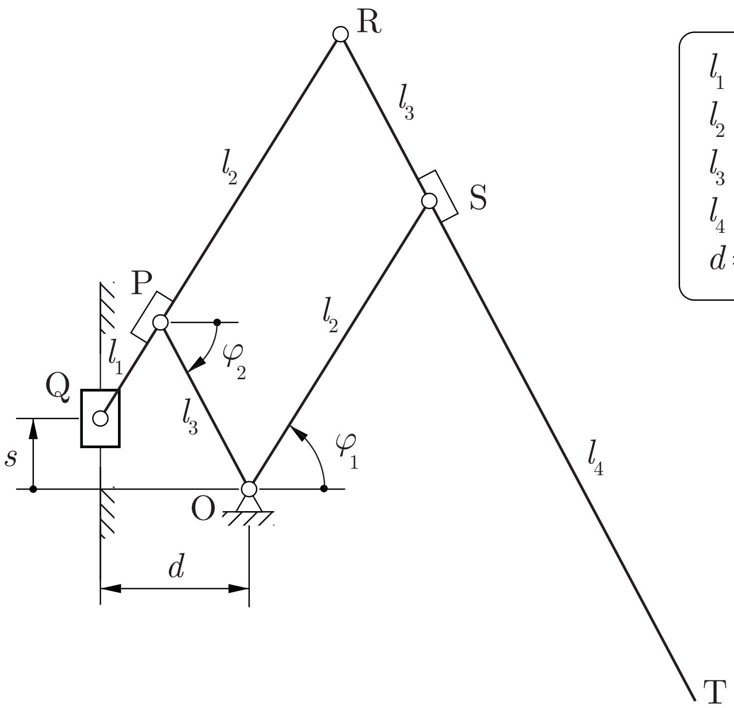
Joan Puig Ortiz

Enrique Zayas Figueras

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.

Exercici 1 [**6 punts**]



$l_1 = 150$ mm
$l_2 = 450$ mm
$l_3 = 250$ mm
$l_4 = 750$ mm
$d = 200$ mm

Per a l'estudi del mecanisme de pantògraf de la figura, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

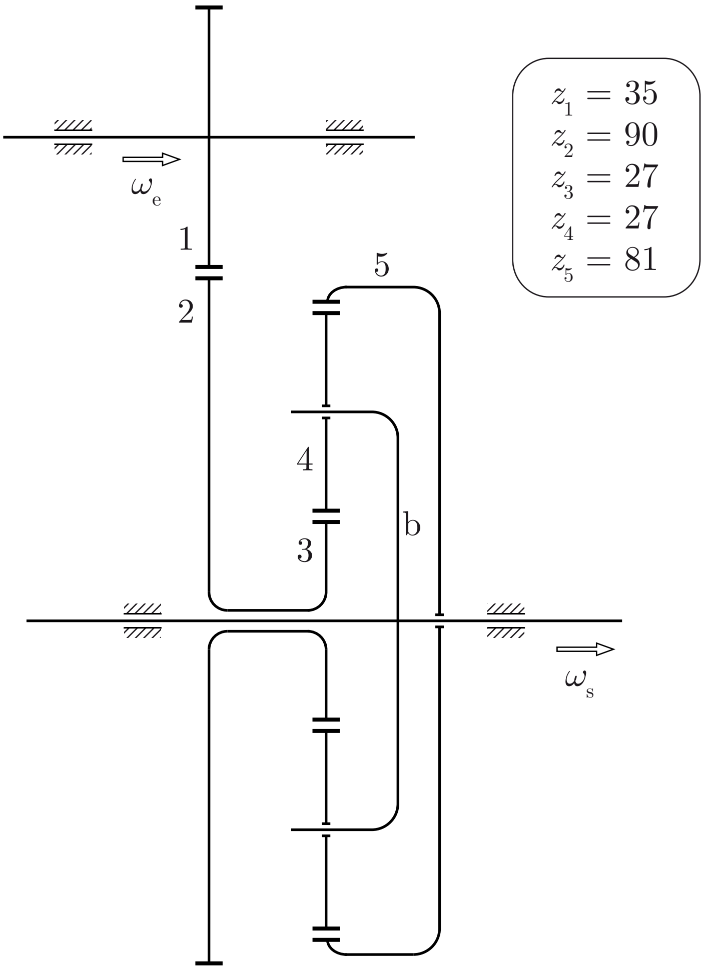
b) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

c) El centre instantani de rotació respecte al terra de la biela QR i de la barra RT.

d) El valor de les coordenades generalitzades en la configuració de punt mort corresponent al màxim d's.

e) La relació $\dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_1$ en la mateixa configuració de l'apartat anterior.

Exercici 2 [4 punts]



Una part d'un mecanisme de transmissió variable contínua s'esquematitza com el tren d'engranatges que mostra la figura. Determineu:

a) La relació de transmissió $\tau_1 = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.

b) L'equació que relaciona les velocitats de rotació ω_3, ω_5 i ω_b.

Si la resta del mecanisme de transmissió imposa $\omega_5 = \omega_1$, determineu:

c) El valor de la relació de transmissió $\tau_t = \dfrac{\omega_s}{\omega_e}$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura el moviment vertical de la corredora, $\dot{s} = 0$, el punt Q queda en repòs; com a conseqüència el triangle PQO esdevé indeformable i sense moviment. Amb els punts P i Q aturats, el punt R queda aturat i per tant es té un altre triangle ORS indeformable i sense moviment. Amb els punts R i S aturats, el punt T no es mou. Així doncs, el sistema té un grau de llibertat ja que anul·lant la velocitat de translació de la corredora Q tot el sistema queda en repòs.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dóna un número igual a 1.

$$5(\text{sòlids mòbils}) \times 3 - 6(\text{articulacions}) \times 2 - 1(\text{p. prismàtic}) \times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

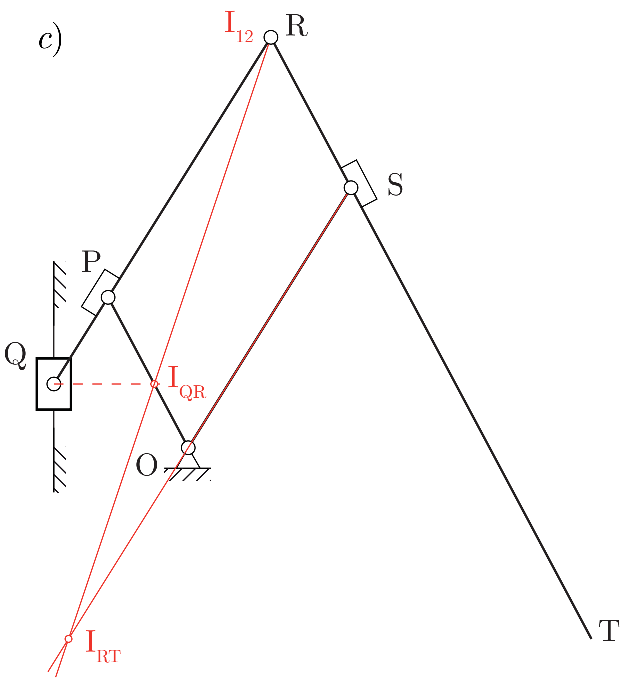
b) Com que s'empren 3 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 2 equacions d'enllaç geomètriques que s'obtenen, per exemple, imposant el tancament de l'anell OPQO.

$$\begin{cases} -l_3 \cos\varphi_2 - l_1 \cos\varphi_1 + d = 0 \\ l_3 \sin\varphi_2 - l_1 \sin\varphi_1 - s = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} l_1 \sin\varphi_1 & l_3 \sin\varphi_2 & 0 \\ -l_1 \cos\varphi_1 & l_3 \cos\varphi_2 & -1 \end{pmatrix}$$

c)



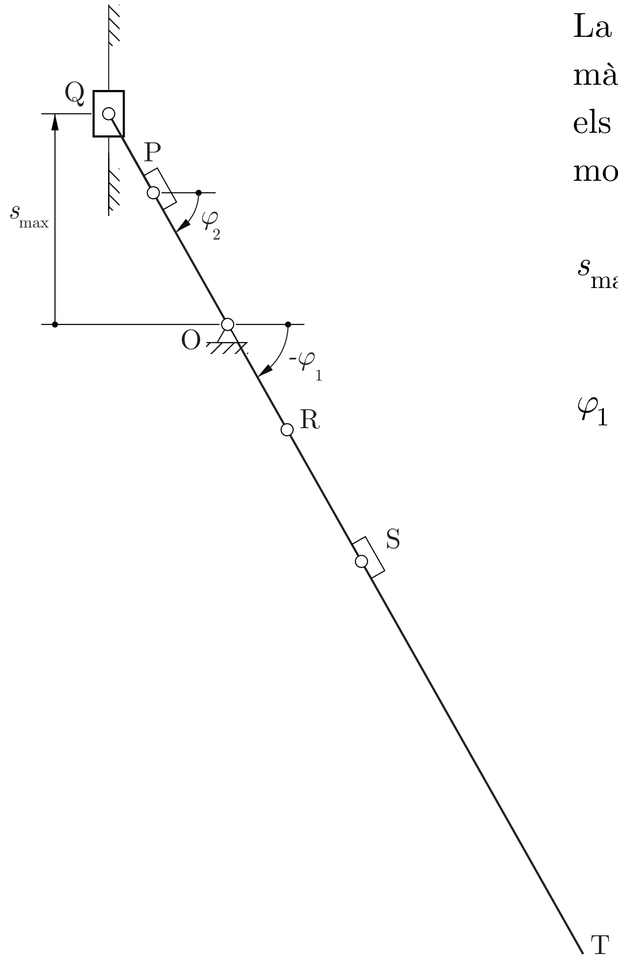
El centre instantani de rotació de la biela QR –I_{QR}– es pot determinar a partir de conèixer la direcció de la velocitat de dos dels seus punts. El punt Q de la biela té sempre velocitat vertical. El punt P té velocitat perpendicular a la recta OP. Així doncs, el centre instantani de rotació de la biela QR es troba a la intersecció entre la recta horitzontal que passa per Q i la recta OP, tal com mostra la figura.

El centre instantani de rotació de la barra RT –I_{RT}– es pot determinar sabent que la direcció de la velocitat d'S és perpendicular a la recta OS. Així doncs, I_{RT} es troba sobre la recta OS.

Per altra banda, l'aplicació del teorema dels tres centres als sòlids bancada –0–, barra RT –1– i biela QR –2– indica que I_{RT} es troba sobre la recta que passa per I_{QR} i el punt R –I_{12}.

Així doncs, I_{RT} es troba en la intersecció de la prolongació d'OS amb la recta que passa per I_{QR} i el punt R, tal com mostra la figura.

d)



La configuració de punt mort corresponent al màxim de la coordenada s és aquella en la qual els punts P, Q i O es troben alineats, tal com mostra la figura. Així doncs:

$$s_{max} = \sqrt{\left(l_1 + l_3\right)^2 - d^2} = 346{,}4\,\text{mm};$$

$$\varphi_1 = -\left(90^o - \arcsin\left(\frac{d}{l_1 + l_3}\right)\right) = -60^o; \varphi_2 = 60^o$$

e) A partir de les equacions cinemàtiques d'enllaç i substituint els valors trobats en l'apartat anterior, s'obté:

$$-l_1\,\dot{\varphi}_1 + l_3\,\dot{\varphi}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = \frac{l_1}{l_3} = 0{,}6\,.$$

Alternativament, es pot arribar a aquest mateix resultat si s'analitza la velocitat del punt P a partir de la composició de moviments prenent com a referència relativa la que es trasllada amb la corredora Q.

$$\boldsymbol{v}_{Abs}(\text{P}) = \boldsymbol{v}_{Rel}(\text{P}) + \boldsymbol{v}_{Arr}(\text{P})\,.$$

En el punt mort corresponent al màxim de la coordenada s $\boldsymbol{v}_{Arr}(\text{P}) = 0$.

Per tant, $\boldsymbol{v}_{Abs}(\text{P}) = \boldsymbol{v}_{Rel}(\text{P}) \;\rightarrow\; l_3\dot{\varphi}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 \;\rightarrow\; \dfrac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = \dfrac{l_1}{l_3} = 0{,}6.$

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura té 2 graus de llibertat ja que si s'atura la rotació de la roda 1 (ω_e), el braç i les rodes 4 i 5 encara poden girar; si s'atura la rotació la rotació del braç (ω_s) el mecanisme queda totalment aturat.

El tren d'engranatges es pot considerar format per:

– Un tren d'eixos fixos de rodes 1 i 2, i
– Un tren epicicloidal simple de rodes 3 (planeta), 4 (satèl·lit) i 5 (corona) i el braç.

Per al tren d'eixos fixos, prenent la roda 1 com a entrada i la roda 2 com a sortida, es pot establir la relació de transmissió:

$$\tau_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{35}{90} = -0,3889\,.$$

b) Per determinar l'equació que relaciona les velocitats angulars dels elements del tren epicicloidal que giren entorn de l'eix fix de sortida, es pot determinar la relació de transmissió entre les velocitats angulars de les rodes 3 i 5 des de la referència fixa al braç (equació de Willis). Si es pren com a entrada la roda 3 i com a sortida la roda 5 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{5/\mathrm{b}}}{\omega_{3/\mathrm{b}}} = \frac{\omega_5 - \omega_\mathrm{b}}{\omega_3 - \omega_\mathrm{b}} \qquad \rightarrow \qquad \tau_2\,\omega_3 + \left(1-\tau_2\right)\omega_\mathrm{b} - \omega_5 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_\text{conductores}}{\prod z_\text{conduides}} = -\frac{z_3 \cdot z_4}{z_4 \cdot z_5} = -\frac{1}{3} = -0,3333.$$

c) La unió dels dos trens fa que les rodes 2 i 3 siguin solidàries: $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{23}$. En conseqüència es pot escriure:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1\,\omega_1 - \omega_{23} = 0 \\ \\ \tau_2\,\omega_{23} + \left(1-\tau_2\right)\omega_\mathrm{b} - \omega_5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \tau_2\,\tau_1\,\omega_1 + \left(1-\tau_2\right)\omega_\mathrm{b} - \omega_5 = 0$$

Si $\omega_5 = \omega_1$ aleshores:

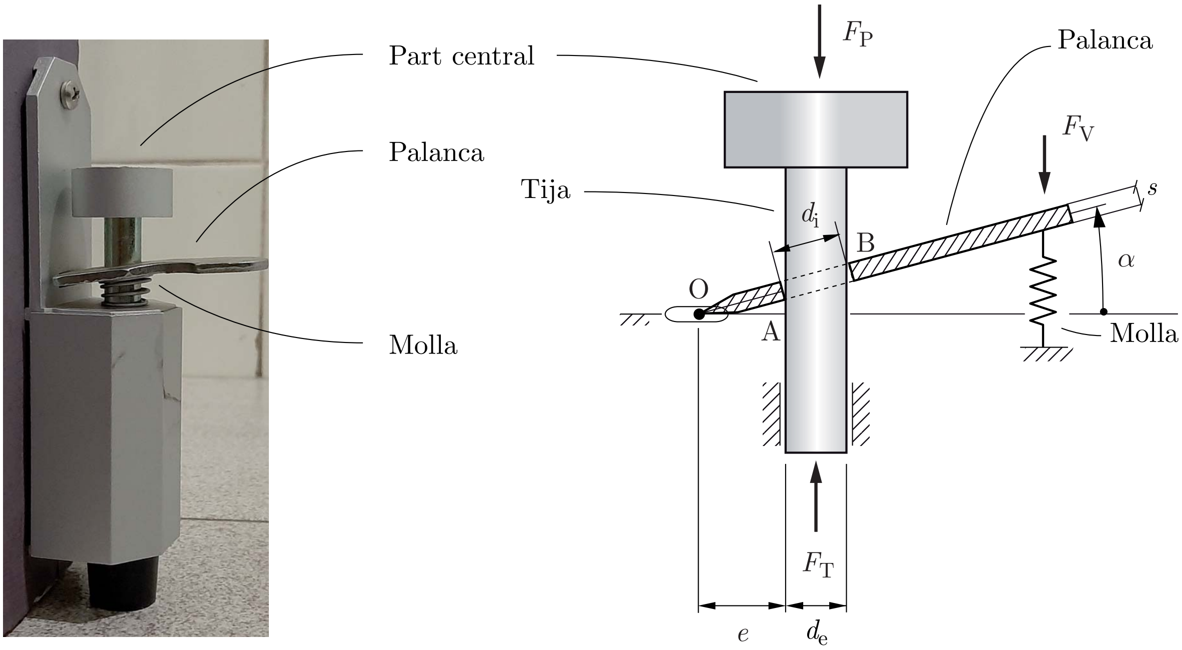
$$\left(\tau_2\,\tau_1 - 1\right)\omega_1 + \left(1-\tau_2\right)\omega_\mathrm{b} = 0$$

Tenint en compte que $\omega_\mathrm{e} = \omega_1$ i que $\omega_\mathrm{s} = \omega_\mathrm{b}$ es determina la relació de transmissió total com:

$$\tau_\mathrm{t} = \frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{e}} = \frac{\omega_\mathrm{b}}{\omega_1} = \frac{1-\tau_1\,\tau_2}{1-\tau_2} = \frac{47}{72} = 0,6528\,.$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu només els fulls quadriculats en el sobre.

Exercici 1 [2,5 punts]



$d_e = 10\,\text{mm}$ $d_i = 10{,}3\,\text{mm}$ $e = 13\,\text{mm}$ $s = 3\,\text{mm}$

La fotografia mostra un retenidor emprat per impedir el moviment de les portes. La part central es desplaça cap avall prement-la amb suficient força però no es pot desplaçar cap amunt sense prémer verticalment la palanca.

La figura mostra l'esquema de funcionament. La palanca és la que manté la part central en repòs i la molla fa inclinar la palanca.

F_T és la força que fa el terra sobre el retenidor, F_P és la força que es fa quan es prem la part central amb el peu per accionar el retenidor i F_V és la força que es fa verticalment sobre la palanca quan es vol alliberar-lo.

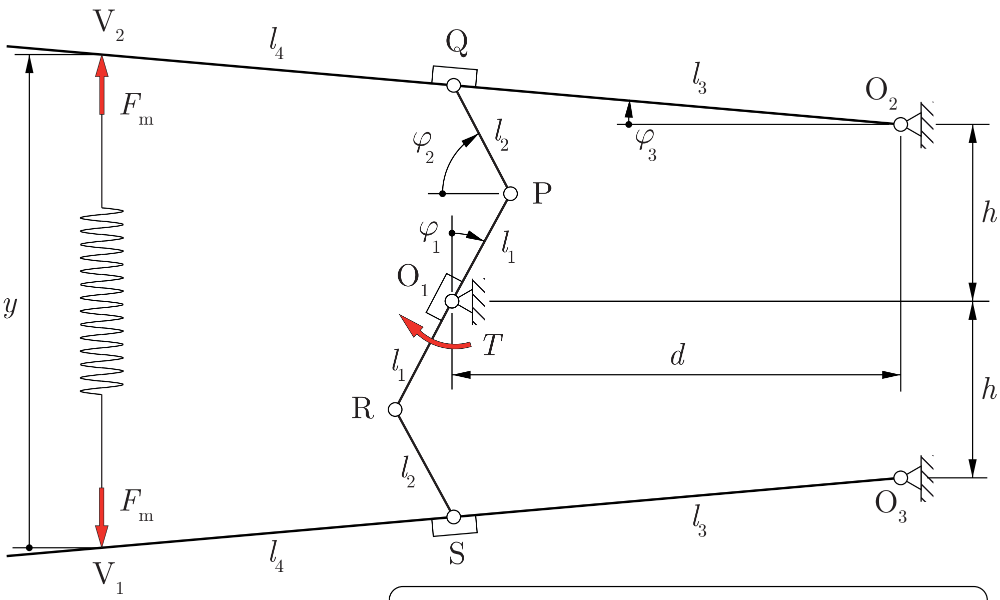
d_e és el diàmetre exterior de la tija de la part central i d_i és el diàmetre interior del forat de la palanca.

Es consideren negligibles tots els frecs, excepte el que hi ha entre la part central i la palanca. També es considera negligible el gruix s de la palanca, de manera que O, A i B estan alineats.

a) Dibuixeu els diagrames de cos lliure de la part central del retenidor i de la palanca quan la porta està retinguda.

b) Plantegeu les equacions de falcament de la part central quan no es realitza cap força sobre la palanca ($F_V = 0$). Determineu el coeficient de frec μ_{min} a A i B per garantir el falcament.

Exercici 2 [4 punts]



$l_1 = 9$ mm	$l_3 = 33$ mm	$d = 33$ mm
$l_2 = 9$ mm	$l_4 = 27$ mm	$h = 13$ mm

La figura mostra l'esquema d'un mecanisme per comprimir molles i deixar-les pretensades.

En el marge de funcionament del mecanisme, es poden considerar negligibles: els desplaçaments horitzontals dels punts V_1 i V_2, les masses i les inèrcies de totes les barres així com totes les resistències passives.

Per tal de fer l'anàlisi cinemàtica i dinàmica del mecanisme, s'empra el conjunt de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) Les equacions geomètriques d'enllaç entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$.

c) La velocitat vertical $\dot{y}$ de separació entre els punts V_1 i V_2.

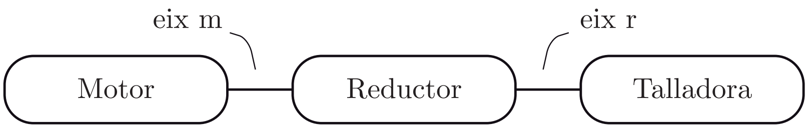
d) L'expressió de la força de la molla F_{m}, si sobre la barra RP s'aplica el parell T indicat. Calculeu-ne el valor per a $T = 20$ N·m; $\varphi_1 = 43{,}76^{\mathrm{o}}$; $\varphi_2 = 46{,}24^{\mathrm{o}}$; $\varphi_3 = 0^{\mathrm{o}}$.

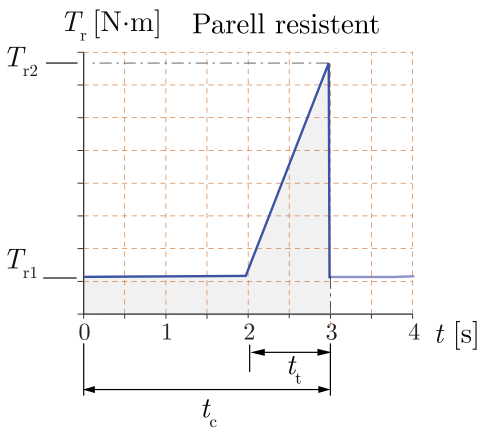
e) El valor de la força F_{Q} a l'articulació Q, en les mateixes condicions que a l'apartat anterior. Comenteu si la barra PQ està sotmesa a tracció o a compressió.

Exercici 3 [3,5 punts]

Una de les màquines addicionals que intervenen en el procés de reciclatge del paper és la màquina encarregada de tallar els tubs de cartró centrals de, per exemple, les bobines de paper, els rotllos de paper de cuina, de paper higiènic...

La talladora de la màquina està accionada per un motor a través d'un reductor i el parell que requereix a l'eix d'entrada en règim estacionari és el que es mostra a la figura.





$T_{r1} = 22{,}5$ N·m
$T_{r2} = 157{,}5$ N·m

Les característiques de la màquina són:

Motor:
- Velocitat en règim nominal $n_m = 1020$ min^{-1}
- Rendiment electromecànic $\eta_{e\text{-}m} = 0{,}85$

Reductor:
- Relació de transmissió $\tau = \omega_r / \omega_m = 5/17$
- Rendiment $\eta_r = 0{,}8$
- Inèrcia reduïda a l'eix m $I_r = 0{,}120$ kg·m^2

Talladora:
- Inèrcia reduïda a l'eix r $I_t = 9{,}5$ kg·m^2
- Parell resistent a l'eix d'entrada T_r indicat a la figura. És el parell per accionar la talladora en règim estacionari. T_{r1} és el parell reduït de les resistències passives.
- Funcionament cíclic amb 15 voltes de l'eix d'entrada per cicle.
- Temps de cicle en règim estacionari $t_c = 3$ s
- Temps de treball en règim estacionari $t_t = 1$ s

En règim estacionari cíclic i suposant la velocitat del motor constant i igual al valor nominal, determineu:

a) La potència $P_{t\ \text{buit}}$ que rep la talladora en buit (no treballa).
b) L'energia E_t que rep la talladora en un cicle.
c) La potència elèctrica mitjana P_e consumida per tota la màquina.

d) El rendiment mitjà η de tota la màquina.

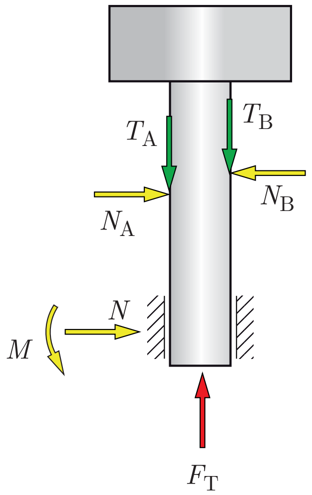
La velocitat en càrrega de fet no és estrictament constant; suposeu que el motor es controla de manera que subministra la potència $P_{\text{càrrega}} = 2{,}1$ kW de manera constant i que els rendiments del motor i del reductor no varien. Determineu:

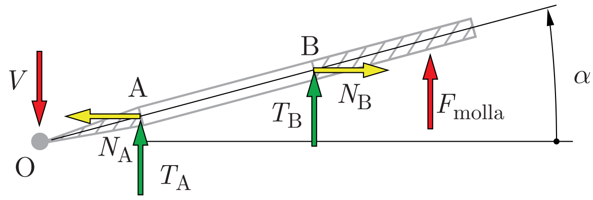
e) La inèrcia de la màquina I_{maq} reduïda a la rotació de l'eix r de la talladora.

f) L'equació de moviment en càrrega.

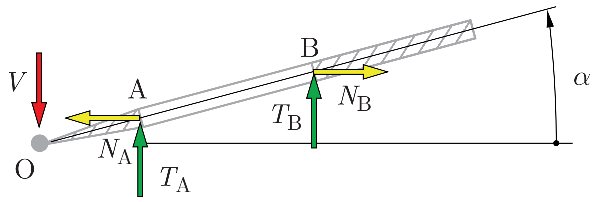
Solució Exercici 1

a) Quan la porta està retinguda els diagrames de sòlid lliure de la part central i de la palanca són els que es mostren a les figures.





b) En l'estudi del falcament només intervenen les forces que poden créixer tant com convingui per garantir la condició de falcament; per tant, la força de la molla es pot negligir. El diagrama de cos lliure de la palanca és aquest cas:



Aplicant els teoremes vectorials a la palanca:

$$\sum F_{\text{horitzontals}} = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{\text{A}} + N_{\text{B}} = 0 \qquad (1)$$
$$\sum F_{\text{verticals}} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{\text{A}} + T_{\text{B}} - V = 0 \qquad (2)$$
$$\sum M(\text{O}) = 0 \quad \rightarrow \quad T_{\text{A}}\, e + N_{\text{A}}\, e \tan\alpha + T_{\text{B}}\left(e + d_{\text{e}}\right) - N_{\text{B}}\left(e + d_{\text{e}}\right)\tan\alpha = 0 \qquad (3)$$

Si s'imposa la condició de lliscament imminent a A i B es té:

$T_{\text{A}} = \mu_{\text{min}} N_{\text{A}}$ i $T_{\text{B}} = \mu_{\text{min}} N_{\text{B}}$. Tenint en compte (1), de (3) s'obté:

$$\left(2\,e + d_{\text{e}}\right)\mu_{\text{min}} - d_{\text{e}} \tan\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{\text{min}} = \frac{1}{\left(2\,e + d_{\text{e}}\right)} d_{\text{e}} \tan\alpha$$

L'angle α s'obté com: $\alpha = \arccos\left(d_{\text{e}}/d_{\text{i}}\right) = 13{,}86^{\text{o}}$; per tant, $\mu_{\text{min}} = 0{,}06855$.

Solució Exercici 2

a) Les equacions d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $O_1PQO_2O_1$ i la matriu jacobiana s'obté derivant-les respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} l_1 \sin\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 - l_3\sin\varphi_3 - h = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} l_1\cos\varphi_1 & l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ -l_1\sin\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & -l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ es pot obtenir, per exemple, a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} = -\left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}\,\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{t}}\right) \quad \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_2\cos\varphi_2 & -l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} l_1\cos\varphi_1 \\ -l_1\sin\varphi_1 \end{Bmatrix}\dot{\varphi}_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{l_1}{l_3}\frac{\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)}{\sin\left(\varphi_2-\varphi_3\right)}\dot{\varphi}_1$$

c) La velocitat $\dot{y}$ de separació entre els punts V_1 i V_2 es pot obtenir com la derivada temporal de la distància vertical y entre ambdós punts.

$$y = 2\,h + 2\,(l_3 + l_4)\sin\varphi_3 \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \dot{\varphi}_3\,2\,(l_3+l_4)\cos\varphi_3$$

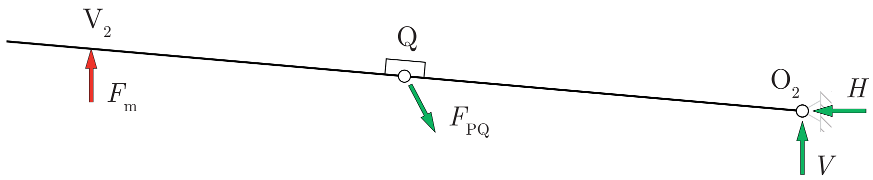
d) Per determinar la força F_{m} quan s'aplica el parell T indicat es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals. En la configuració en la qual $\varphi_3 = 0^{\mathrm{o}}$:

$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \quad \rightarrow \quad T\dot{\varphi}_1^* + F_{\mathrm{m}}\,\dot{y}^* = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{m}} = -T\,\frac{\dot{\varphi}_1^*}{\dot{y}^*}$$

La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^*$ i $\dot{y}^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant amb les relacions trobades als apartats *b*) i *c*) s'obté l'expressió de la força F_{m}.

$F_{\mathrm{m}} = T\dfrac{l_3}{2\left(l_3+l_4\right)}\dfrac{\sin\left(\varphi_2-\varphi_3\right)}{\cos\varphi_3\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)}$. Amb els valors numèrics donats $F_{\mathrm{m}} = 441{,}8$ N.

e) En ser la barra PQ de massa i inèrcia negligibles es pot assegurar que la força F_{Q} que fa té la direcció de la pròpia barra. Per determinar-la, es pot aplicar el teorema del moment cinètic en el punt O_2 al sòlid V_2QO_2. El diagrama de sòlid lliure d'aquest sòlid es mostra a la figura adjunta.



$$\sum_{\text{TQO}_2} M_{\text{ext}}(\text{O}_2) = 0 \qquad F_\text{m}\left(l_3 + l_4\right)\cos\varphi_3 - F_\text{PQ}\, l_3 \sin\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) = 0$$

$$F_\text{PQ} = F_\text{m} \frac{\left(l_3 + l_4\right)}{l_3} \frac{\cos\varphi_3}{\sin\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)}$$

En la configuració indicada, $F_{\text{PQ}} = 1{,}112$ kN. El signe positiu del valor de F_{PQ} és indicatiu que la força s'ha dibuixat en el sentit correcte i per tant que la barra PQ està sotmesa a tracció.

Solució Exercici 3

a) La potència $P_{\text{t buit}}$ que rep la talladora en buit, quan no està treballant, es pot determinar a partir del parell resistent T_{r1} i la velocitat angular de rotació de l'eix r.

$$P_{\text{t buit}} = T_{\text{r1}}\,\omega_\text{r} = T_{\text{r1}}\,\tau\,\omega_\text{m} = T_{\text{r1}} \frac{\varphi_\text{c}}{t_\text{c}} = 706{,}9 \text{ W.}$$

b) L'energia E_t que rep la talladora en un cicle es pot determinar com la suma de l'energia que rep en buit més l'energia que rep quan està treballant.

$$E_\text{t} = E_{\text{t buit}} + E_{\text{t treball}}$$

$$E_\text{t} = P_{\text{t buit}}\left(t_\text{c} - t_\text{t}\right) + E_{\text{t treball}}$$

$$E_\text{t} = T_{\text{r1}}\,\omega_\text{r}\left(t_\text{c} - t_\text{t}\right) + T_{\text{r1}}\,\omega_\text{r}\,t_\text{t} + \frac{T_{\text{r2}} - T_{\text{r1}}}{2}\,\omega_\text{r}\,t_\text{t} = \left(T_{\text{r1}}\ t_\text{c} + \frac{T_{\text{r2}} - T_{\text{r1}}}{2}\,t_\text{t}\right)\omega_\text{r}$$

$$E_\text{t} = 4241 \text{ J}$$

c) La potència elèctrica mitjana P_e consumida per tota la màquina es pot determinar, per exemple, aplicant el principi de conservació de l'energia a la talladora.

$$P_{\text{subministrada}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}}$$

$$P_\text{e}\,\eta_{\text{e-m}}\eta_\text{r} = \frac{E_\text{t}}{t_\text{c}} \qquad \rightarrow \qquad P_\text{e} = \frac{1}{\eta_{\text{e-m}}\eta_\text{r}} \frac{E_\text{t}}{t_\text{c}} = 2079 \text{ W}$$

d) El rendiment mitjà η de tota la màquina es determina a partir de la seva definició

$$\eta = \frac{E_{\text{útil}}}{E_{\text{subministrada}}} = \frac{\dfrac{T_{\text{r2}} - T_{\text{r1}}}{2}\ t_\text{t}\,\omega_\text{r}}{P_\text{e}\,t_\text{c}} = 0{,}34$$

e) La inèrcia de la màquina I_{maq} reduïda a la rotació de l'eix r de la talladora s'obté per identificació en el càlcul de l'energia cinètica de tota la màquina.

$$E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c\ reductor}} + E_{\mathrm{c\ talladora}}$$
$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{r}}\, \omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{t}}\, \omega_{\mathrm{r}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{\mathrm{r}}}{\tau^2} + I_{\mathrm{t}}\right)\omega_{\mathrm{r}}^2$$
$$I_{\mathrm{maq}} = \frac{I_{\mathrm{r}}}{\tau^2} + I_{\mathrm{t}} = 10{,}89\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$$

f) L'equació de moviment en càrrega es determina, per exemple, aplicant el principi de conservació de l'energia al sistema format pel reductor i la talladora.

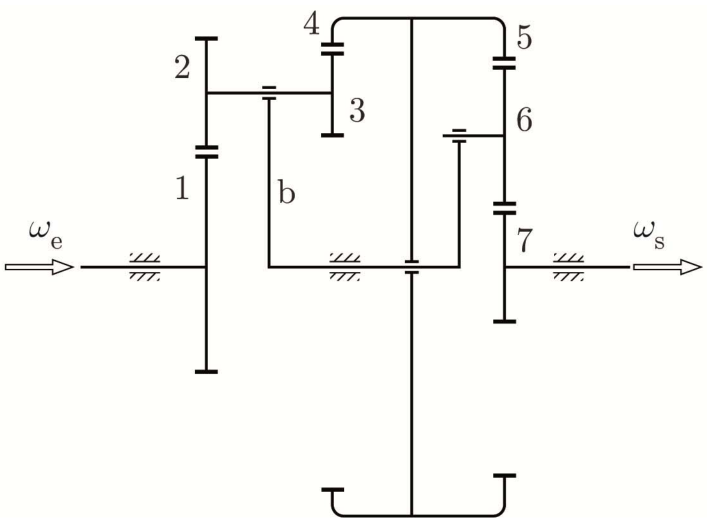
$$P_{\mathrm{subministrada}} = P_{\mathrm{cedida}} + P_{\mathrm{acumulada}}$$
$$P_{\mathrm{càrrega}} = P_{\mathrm{càrrega}}\left(1 - \eta_{\mathrm{r}}\right) + T_{\mathrm{r}}\, \omega_{\mathrm{r}} + I_{\mathrm{maq}} \omega_{\mathrm{r}} \alpha_{\mathrm{r}}$$

Per tant, l'equació del moviment acaba essent:

$$I_{\mathrm{maq}} \omega_{\mathrm{r}} \alpha_{\mathrm{r}} + T_{\mathrm{r}}\, \omega_{\mathrm{r}} - P_{\mathrm{càrrega}} \eta_{\mathrm{r}} = 0$$

- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i tot el material reciclable en el sobre.

Exercici 1 [**4 punts**]



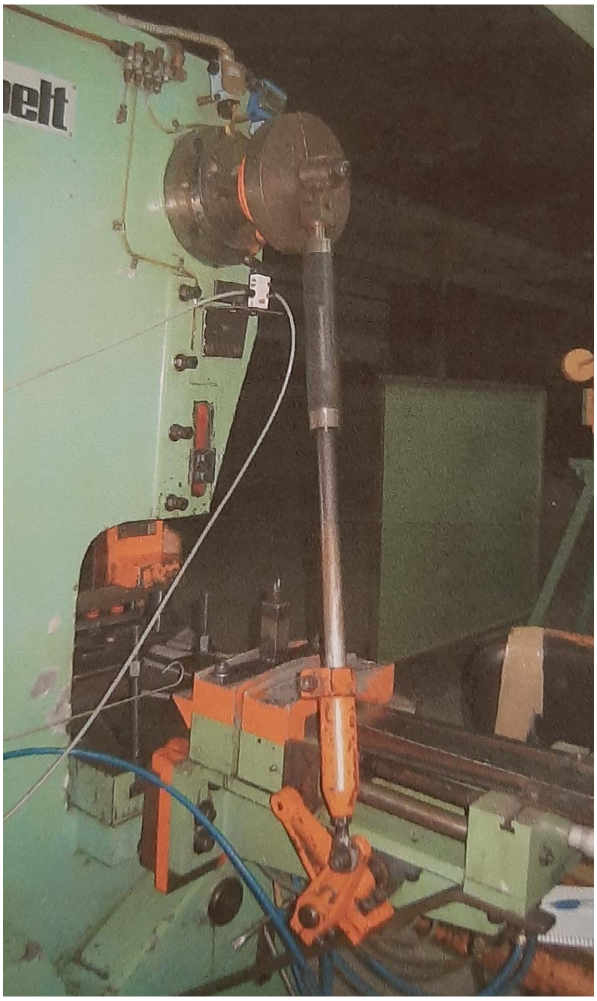
$z_1 = 48$	$z_5 = 84$
$z_2 = 24$	$z_6 = 30$
$z_3 = 18$	$z_7 = 24$
$z_4 = 90$	

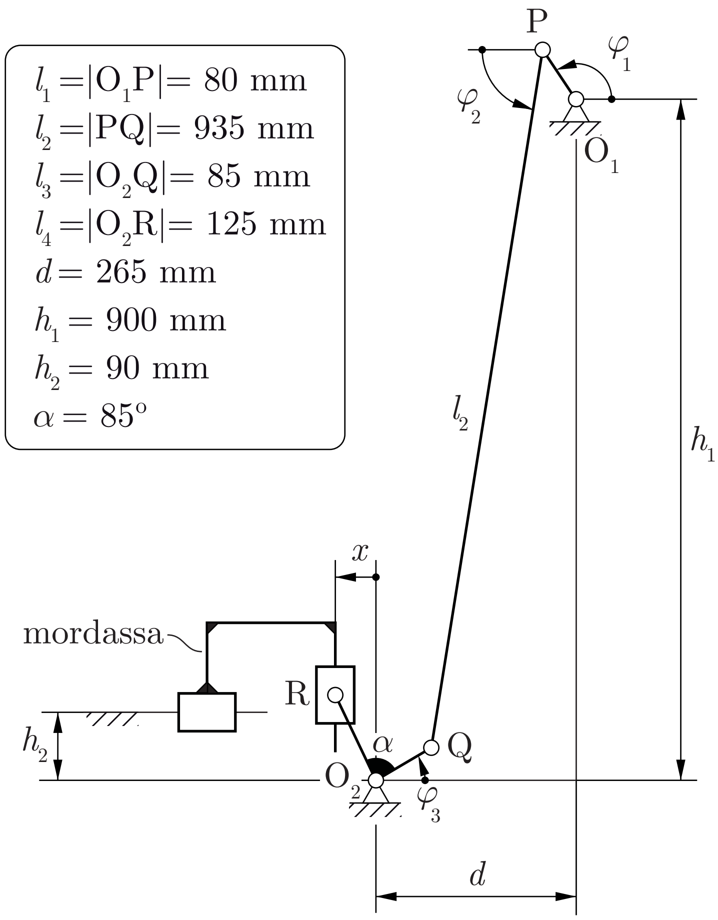
Per a l'estudi del tren d'engranatges de la figura, s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_1, \omega_\mathrm{b}, \omega_{45}, \omega_7\}^\mathrm{T}$. Determineu:

a) Les equacions d'enllaç cinemàtiques entre les velocitats generalitzades.

b) Els valors de les relacions de transmissió $\tau = \omega_\mathrm{s}/\omega_\mathrm{e}$ que es poden obtenir quan $\omega_\mathrm{b} = 0$, quan $\omega_{45} = 0$ i quan $\omega_\mathrm{b} = \omega_{45}$.

Exercici 2 [6 punts]





L'esquema de la figura representa el mecanisme del braç alimentador d'una màquina que talla làmines d'acer (fotografia) i que s'acciona mitjançant un motor que controla la rotació de la manovella O_1P.

La mordassa encarregada de moure la làmina d'acer s'ha modelitzat mitjançant dues corredores: una amb moviment horitzontal x respecte al terra i l'altra amb moviment vertical respecte la primera.

Per a l'anàlisi cinemàtica del mecanisme s'utilitzen les coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

b) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

c) La posició del centre instantani de rotació respecte al terra de la biela PQ.

d) Els valors mínim $\varphi_{3\min}$ i màxim $\varphi_{3\max}$ de l'angle que orienta el membre RO_2Q.

e) La cursa Δx de la mordassa.

Solució – Exercici 1

a) El tren d'engranatges de la figura té 2 graus de llibertat ja que si s'atura la rotació del braç (ω_{b}) es converteix en un tren d'eixos fixos que té 1 grau de llibertat.

El tren d'engranatges es pot considerar format per dos trens epicicloidals simples:

– Primer tren de rodes 1 (planeta), 2, 3 (satèl·lits), 4 (corona) i braç b.
– Segon tren de rodes 5 (corona), 6 (satèl·lit), 7 (planeta) i braç b.

La unió dels dos trens fa que les rodes 4 i 5 siguin solidàries: $\omega_4 = \omega_5 = \omega_{45}$ i que el braç dels dos trens sigui el mateix element.

Per determinar les equacions que relacionen les velocitats angulars dels elements que giren entorn de l'eix fix, es poden determinar les relacions de transmissió entre les velocitats angulars per a cadascun dels trens epicicloidals simples (equació de Willis).

Si per al primer tren es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 4 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{45} - \omega_{\mathrm{b}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{b}}} \qquad \rightarrow \qquad \tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_{45} = 0 \qquad [1]$$

amb $\tau_1 = -\dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = -\dfrac{2}{5} = -0,4.$

Si per al segon tren es pren com a entrada la roda 5 i com a sortida la roda 7 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_7 - \omega_{\mathrm{b}}}{\omega_{45} - \omega_{\mathrm{b}}} \qquad \rightarrow \qquad \tau_2\,\omega_{45} + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_7 = 0 \qquad [2]$$

amb $\tau_2 = -\dfrac{z_5 \cdot z_6}{z_6 \cdot z_7} = -\dfrac{7}{2} = -3,5.$

b) Les relacions de transmissió $\tau = \omega_{\mathrm{s}} / \omega_{\mathrm{e}}$ demanades s'obtenen imposant les condicions a les equacions [1] i [2].

$$\text{Si } \omega_{\mathrm{b}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \tau_1\,\omega_1 - \omega_{45} = 0 \\ \tau_2\,\omega_{45} - \omega_7 = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_7}{\omega_1} = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{7}{5} = 1,4.$$

$$\text{Si } \omega_{45} = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\mathrm{b}} = 0 \\ \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{\omega_7}{\omega_1} = \frac{\left(1 - \tau_2\right) \cdot \tau_1}{\tau_1 - 1} = \frac{9}{7} = 1,2857.$$

$$\text{Si } \omega_{\mathrm{b}} = \omega_{45} \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \tau_1\,\omega_1 - \tau_1\,\omega_{\mathrm{b}} = 0 \\ \omega_{\mathrm{b}} - \omega_7 = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_7}{\omega_1} = 1.$$

Solució – Exercici 2

a) Si s'atura la rotació de la manovella O_1P, el punt P queda fixat i es forma un triangle PQO_2 no deformable i immòbil. En conseqüència, el punt R queda aturat per pertànyer al sòlid RO_2Q. Amb el punt R aturat, les corredores representatives de la mordassa també queden en repòs. Per tant, el mecanisme té 1 grau de llibertat ja que aturant una única velocitat queda en repòs.
De fet, el mecanisme és un quadrilàter articulat amb un grup d'Assur, format per les dues corredores unides mitjançant dos parells prismàtics i una articulació.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dóna un número igual a 1.

$$5(\text{sòlids mòbils})\times 3 - 5(\text{articulacions})\times 2 - 2(\text{p. prismàtics})\times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 4 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 3 equacions d'enllaç geomètriques dues de les quals s'obtenen, per exemple, imposant el tancament de l'anell $O_1PQO_2O_1$. La tercera equació es pot obtenir de la projecció de la distància O_2R sobre l'horitzontal.

$$\begin{cases} l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2 - l_3\cos\varphi_3 + d = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2 - l_3\sin\varphi_3 + h_1 = 0 \\ l_4\cos\left(\varphi_3+\alpha\right) + x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = 0$$

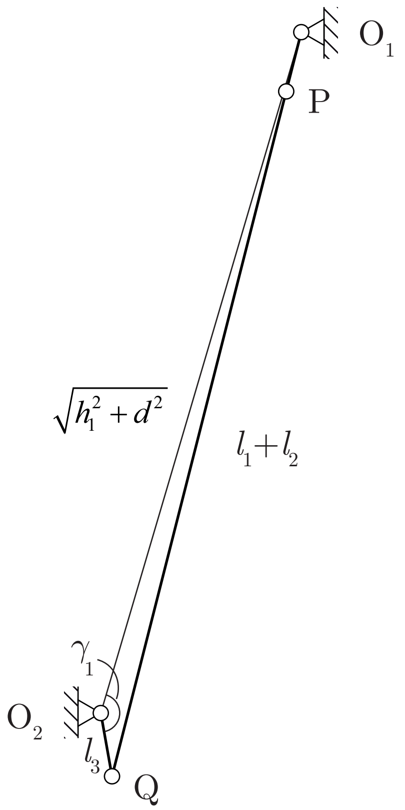
La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & l_2\sin\varphi_2 & l_3\sin\varphi_3 & 0 \\ l_1\cos\varphi_1 & -l_2\cos\varphi_2 & -l_3\cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -l_4\sin\left(\varphi_3+\alpha\right) & 1 \end{pmatrix}$$

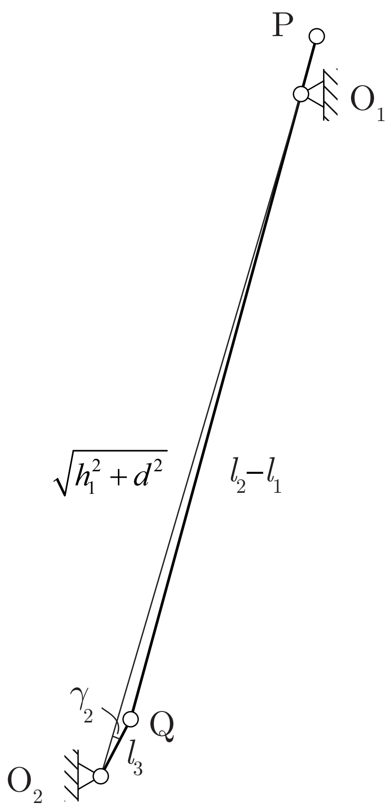
c) El centre instantani de rotació de la biela PQ es pot determinar a partir de conèixer la direcció de la velocitat de dos dels seus punts. El punt P té velocitat perpendicular a la recta O_1P. El punt Q té velocitat perpendicular a la recta O_2Q. Així doncs, el centre instantani de rotació de la biela PQ es troba a la intersecció de les prolongacions de les rectes O_1P i O_2Q.

d) Els valors mínim $\varphi_{3\min}$ i màxim $\varphi_{3\max}$ de l'angle que orienta el membre RO_2Q corresponen a les configuracions de punt mort de la coordenada φ_3 i són aquelles en les quals els punts O_1, P, i Q es troben alineats, tal com mostren les figures.

Configuració de $\varphi_{3\text{min}}$:



Configuració de $\varphi_{3\text{max}}$:



Aplicant el teorema del cosinus al triangle O_2QO_1, s'obtenen els angles γ_1 i γ_2:

$$\gamma_1 = \arccos\left(\frac{\left(l_1+l_2\right)^2 - l_3^2 - \left(h_1^2+d^2\right)}{-2\,l_3\sqrt{h_1^2+d^2}}\right) = 153,5^{\text{o}}$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{\left(l_2-l_1\right)^2 - l_3^2 - \left(h_1^2+d^2\right)}{-2\,l_3\sqrt{h_1^2+d^2}}\right) = 11,26^{\text{o}}$$

Es defineix l'angle β com: $\beta = \arctan\left(\frac{h_1}{d}\right)$. Aleshores:

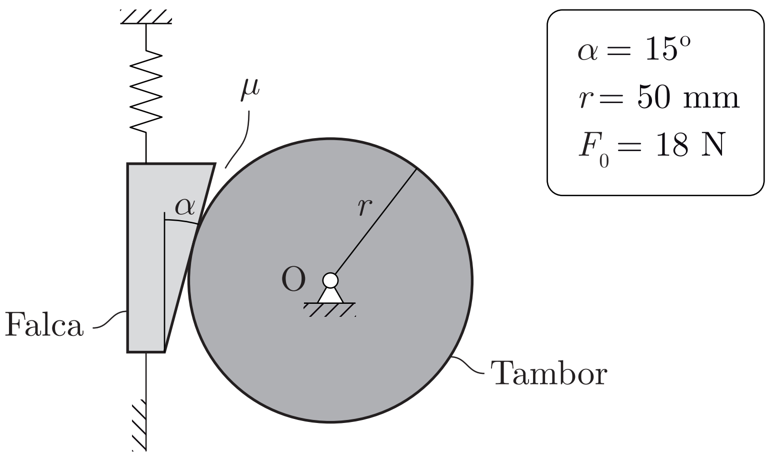
$\varphi_{3\,\text{min}} = -\left(\gamma_1-\beta\right) = -79,94^{\text{o}}$ i $\varphi_{3\,\text{max}} = \left(\beta-\gamma_2\right) = 62,33^{\text{o}}$.

e) La cursa Δx de la mordassa es determina a partir dels punts morts de la coordenada x.

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{max}} &= -l_4\cos\left(\varphi_{3\,\text{max}}+\alpha\right) = 105,2\ \text{mm} \\ x_{\text{min}} &= -l_4\cos\left(\varphi_{3\,\text{min}}+\alpha\right) = -124,5\ \text{mm}\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta x = 229,7\ \text{mm}.$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu només els fulls quadriculats en el sobre.

Exercici 1 [3 punts]



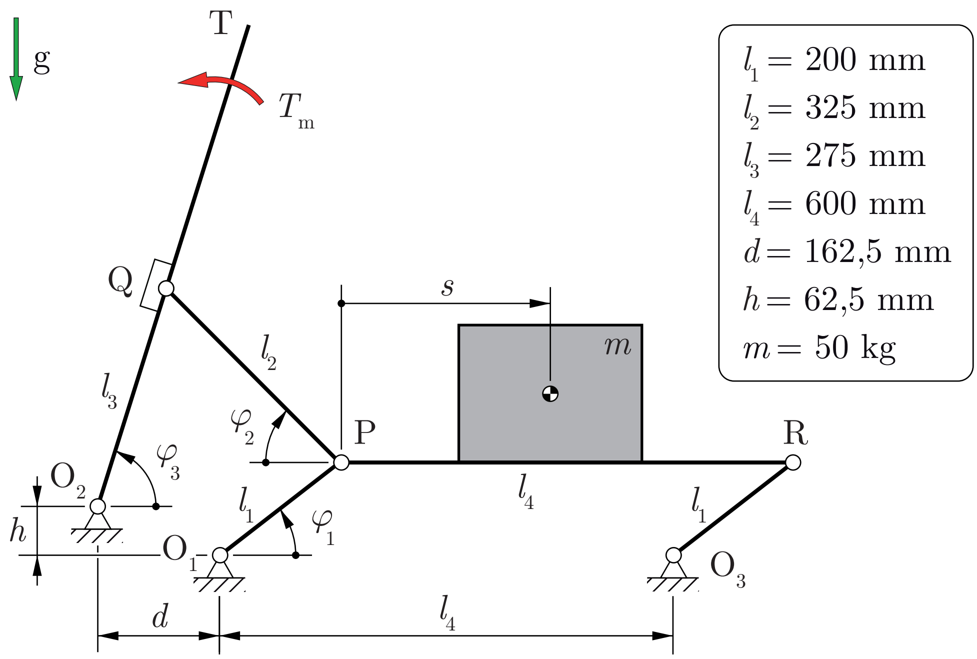
Es desitja aturar la rotació en sentit antihorari del tambor de radi r de la figura. La molla empeny, amb una força F_0, la falca de massa negligible que pot lliscar sense frec al llarg de la guia fixa.

Determineu:

a) El coeficient de frec μ entre el tambor i la falca que garanteix el falcament si sobre el tambor actua un parell T_m en sentit antihorari.

b) El parell mínim necessari T_min per fer girar el tambor en sentit horari, si el coeficient μ té el valor trobat a l'apartat anterior.

Exercici 2 [4 punts]



L'esquema de la figura correspon al d'una plataforma elevadora, instal·lada sobre un carretó, que s'acciona aplicant un parell T_m a la barra O_2T.
Es consideren negligibles totes les resistències passives.
Per al seu estudi cinemàtic i dinàmic, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$. Determineu:

a) Les equacions geomètriques d'enllaç entre les coordenades.

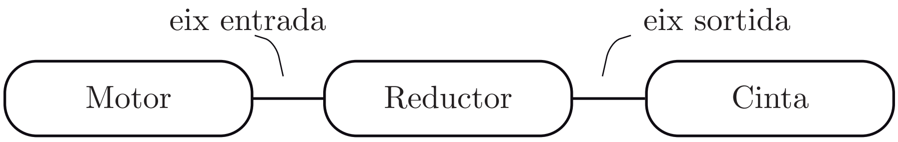
b) La relació de velocitats angulars $\dot{\varphi}_1 / \dot{\varphi}_3$.

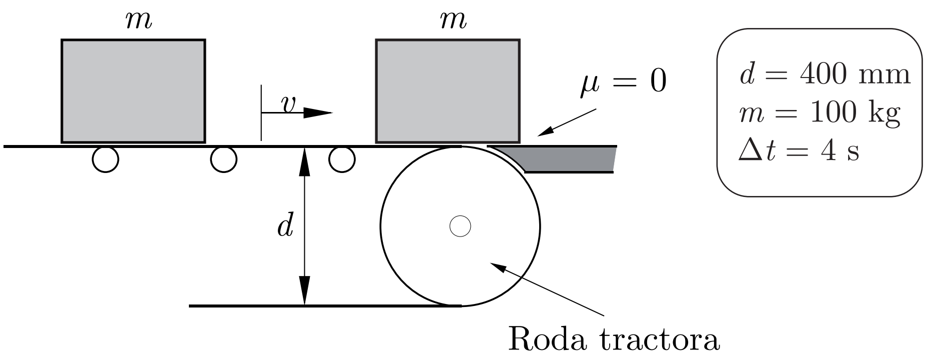
Es desitja elevar una càrrega de massa m, que es manté en repòs respecte la plataforma PR, en règim quasiestàtic. Determineu:

c) El parell necessari T_m que s'ha d'aplicar a la barra O_2T a causa d'aquesta càrrega. Justifiqueu si aquest valor depèn del centrat de la càrrega sobre la plataforma PR, és a dir si depèn de la coordenada s. Calculeu el valor del parell per a la configuració $\boldsymbol{q} = \{30^o, 42{,}6^o, 69{,}5^o\}^T$.

d) La força F_{PQ} a la qual està sotmesa la barra PQ a causa d'aquesta càrrega i el seu valor per a la mateixa configuració de l'apartat anterior. Indiqueu si la barra PQ està sotmesa a tracció o a compressió.

Exercici 3 [**3 punts**]





Una cinta transportadora horitzontal d'un magatzem és accionada per un motor a través d'un reductor que fa moure la roda tractora, de diàmetre $d = 400$ mm, de la cinta.

En règim estacionari, la cinta es mou a velocitat v. Cada $\Delta t = 4$ s, la cinta rep un paquet de massa $m = 100$ kg amb velocitat horitzontal nul·la que hi queda en repòs fins que al final en surt per una pista horitzontal de frec negligible.

Les característiques de cadascun dels elements són:

Motor:
- Velocitat en règim estacionari $n_{\text{mot}} = 1440 \text{ min}^{-1}$
- Rendiment electromecànic $\eta_{\text{e-m}} = 0{,}6$

Reductor:
- Relació de transmissió $\tau = 1/15$
- Rendiment $\eta_{\text{r}} = 0{,}7$

Cinta:
- Inèrcia reduïda a la velocitat d'avanç $m_{\text{cinta}} = 1000$ kg
- Resistències passives reduïdes a la velocitat d'avanç $F_{\text{rp}} = 300$ N

Quan la cinta funciona en règim estacionari, l'energia necessària per manipular un paquet és $E_{\text{paquet}} = m{\cdot}v^2$. Determineu:

a) L'energia elèctrica consumida pel motor, E_{mot}, durant un temps $t = 1$ h.
b) Les potències mitjanes dissipades en el motor, $P_{\text{dis mot}}$, i en el reductor $P_{\text{dis red}}$.
c) Els parells mitjans a l'eix d'entrada, T_{entrada}, i a l'eix de sortida, T_{sortida}, del reductor.

Durant la posada en marxa, no es dipositen paquets sobre la cinta. Acceptant les hipòtesis següents:

- Els rendiments i les resistències passives es mantenen constants i iguals als del règim estacionari.

- El parell motor en funció de la seva velocitat angular és:

$$T_\mathrm{m} = T_0\left(c_1 + c_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + c_3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right),\ \text{amb}\ T_0 = 116\ \mathrm{Nm},\ \omega_0 = 50\,\pi\ \mathrm{rad/s},$$

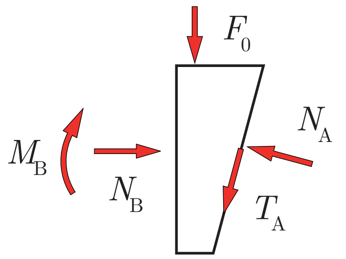
$$c_1 = 0{,}3,\ c_2 = 0{,}7\ \text{i}\ c_3 = -1$$

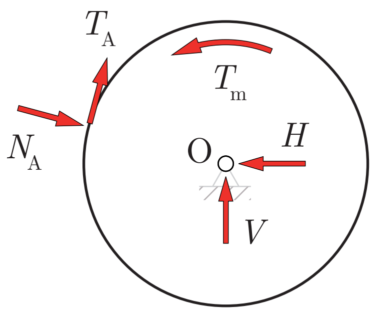
Determineu:

d) L'acceleració a de la cinta quan $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 0,5$.

Solució Exercici 1

a) Quan sobre el tambor actua un parell T_m en sentit antihorari els diagrames de sòlid lliure de la falca i del tambor són els que es mostren a les figures.





Aplicant el teorema de la quantitat de moviment a la falca en direcció vertical s'obté:

$$\sum F_\text{verticals} = 0 \quad \rightarrow \quad N_\mathrm{A} \sin\alpha - T_\mathrm{A} \cos\alpha - F_0 = 0$$

Si s'imposa la condició de lliscament imminent a A es té: $T_\mathrm{A} = \mu\, N_\mathrm{A}$. En conseqüència:

$N_\mathrm{A} = \dfrac{F_0}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$. Per tal que hi hagi falcament la força N_A ha de tendir a infinit. Per tant:

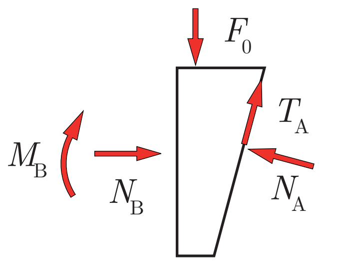
$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0 \rightarrow \quad \mu = \tan\alpha = 0{,}2679.$$

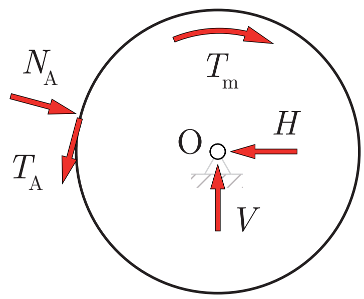
Aplicant el teorema del moment cinètic al tambor en el punt O, s'obté:

$$\sum M(\mathrm{O}) = 0 \quad \rightarrow \quad T_\mathrm{m} - T_\mathrm{A}\, r = 0$$

Si s'imposa la condició de lliscament imminent a A es té: $T_\mathrm{m} = \mu\, N_\mathrm{A}\, r$. S'observa que si la força N_A tendeix a infinit el parell T_m també ho ha de fer. Com que aquest fet no pot donar-se, el sistema quedarà falcat.

b) Quan sobre el tambor actua un parell T_m en sentit horari els diagrames de sòlid lliure de la falca i del tambor són els que es mostren a les figures.





Aplicant el teorema del moment cinètic al tambor en el punt O, s'obté:

$$\sum M(\mathrm{O}) = 0 \quad \rightarrow \quad T_\mathrm{m} - T_\mathrm{A}\, r = 0$$

Si s'imposa la condició de lliscament imminent a A es té: $T_\mathrm{m} = \mu\, N_\mathrm{A}\, r$.

Aplicant el teorema de la quantitat de moviment a la falca en direcció vertical s'obté:

$$\sum F_\mathrm{verticals} = 0 \quad \rightarrow \quad N_\mathrm{A} \sin\alpha + T_\mathrm{A} \cos\alpha - F_0 = 0$$

Si s'imposa la condició de lliscament imminent a A es té: $T_\mathrm{A} = \mu\, N_\mathrm{A}$. En conseqüència:

$$N_\mathrm{A} = \frac{F_0}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \text{ i per tant } T_\mathrm{m} = \mu \frac{F_0\, r}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}.$$

Substituint els valors numèrics s'obté el valor del parell mínim: $T_\mathrm{min} = 465{,}9$ N·mm.

Solució Exercici 2

a) Les equacions d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $\mathrm{O_1PQO_2O_1}$.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2 - l_3\cos\varphi_3 + d = 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 - l_3\sin\varphi_3 - h = 0 \end{cases}$$

b) La relació entre les velocitats angulars $\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_3$ es pot obtenir, per exemple, a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats. La matriu jacobiana és en aquest cas:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & l_2\sin\varphi_2 & l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & -l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}^\mathrm{d} = -\left(\boldsymbol{\Phi}_\mathrm{q}^\mathrm{d}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}_\mathrm{q}^\mathrm{i}\,\dot{\boldsymbol{q}}^\mathrm{i} + \boldsymbol{\Phi}_\mathrm{t}\right) \quad \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2\end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & l_2\sin\varphi_2 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} l_3\sin\varphi_3 \\ -l_3\cos\varphi_3\end{Bmatrix}\dot\varphi_3 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot\varphi_1}{\dot\varphi_3} = \frac{l_3}{l_1}\frac{\sin\left(\varphi_2+\varphi_3\right)}{\sin\left(\varphi_2+\varphi_1\right)}$$

c) Per determinar el parell T_m que s'ha d'aplicar a la barra $\mathrm{O_2T}$ per elevar la càrrega m en règim quasiestàtic, es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

$$\sum_\mathrm{sistema} P^* = 0 \;\rightarrow\; T_\mathrm{m}\dot\varphi_3^* - m\,g\,l_1\cos\varphi_1\,\dot\varphi_1^* = 0$$

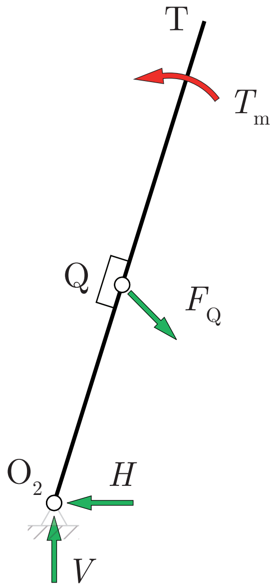
La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^*$ i $\dot{\varphi}_3^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant, amb la relació trobada a l'apartat *b*) s'obté l'expressió del parell T_m.

$$T_\mathrm{m} = m\,g\,l_3 \frac{\cos\varphi_1 \sin\left(\varphi_2 + \varphi_3\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \varphi_1\right)}.$$

$\mathrm{O_1PRO_2}$ és un paral·lelogram articulat; per tant, tots els punts de la barra PR tenen la mateixa velocitat. En conseqüència, en règim quasietàtic, el valor del parell T_m no depèn del centrat de la càrrega, és a dir no depèn de la coordenada s.

Per a la configuració demanada, $T_\mathrm{m} = 113{,}4$ N·m.

d) En ser la barra PQ de massa i inèrcia negligibles es pot assegurar que la força F_PQ que fa té la direcció de la pròpia barra. Per determinar-la, es pot aplicar el teorema del moment cinètic en el punt $\mathrm{O_2}$ al sòlid $\mathrm{O_2QT}$. El diagrama de sòlid lliure d'aquest sòlid es mostra a la figura adjunta.



$$\sum_{\mathrm{TQO_2}} M_\mathrm{ext}(\mathrm{O_2}) = 0 \qquad T - F_\mathrm{PQ}\, l_3 \sin\left(\varphi_2 + \varphi_3\right) = 0$$

$$F_\mathrm{PQ} = \frac{T}{l_3} \frac{1}{\sin\left(\varphi_2 + \varphi_3\right)}$$

En la configuració indicada, $F_\mathrm{PQ} = 445{,}1$ N. El signe positiu del valor de F_PQ és indicatiu que la força s'ha dibuixat en el sentit correcte i per tant que la barra PQ està sotmesa a tracció.

Solució Exercici 3

a) L'aplicació del principi de conservació de l'energia en règim estacionari al sistema cinta condueix a:.

$$E_\mathrm{sub} = E_\mathrm{rp} + E_\mathrm{paquets} \quad \rightarrow \quad E_\mathrm{mot}\eta_\text{e-m}\eta_\mathrm{r} = E_\mathrm{rp} + E_\mathrm{paquet}{\cdot}n_\mathrm{paquets}$$
$$E_\mathrm{mot}\eta_\text{e-m}\eta_\mathrm{r} = F_\mathrm{rp} v\,t + m\,v^2{\cdot}n_\mathrm{paquets}$$

La velocitat v a la qual es mou la cinta i el nombre de paquets que transporta la cinta durant $\Delta t = 1$ h són:

$$v = \omega_{\text{roda}}\frac{d}{2} = \omega_{\text{mot}}\tau\frac{d}{2} = n_{\text{mot}}\frac{2\,\pi}{60}\frac{d}{2} = 2{,}011\ \text{m/s}; \qquad n_{\text{paquets}} = t\,/\,\Delta t = 900.$$

Per tant, $E_{\text{mot}} = \dfrac{F_{\text{rp}}v\,t + m\,v^2{\cdot}n_{\text{paquets}}}{\eta_{\text{e-m}}\eta_{\text{r}}} = 6{,}036\ \text{MJ} = 1{,}678\ \text{kW·h}.$

b) La potència mitjana dissipada al motor es pot determinar a partir de l'energia que se li subministra durant $t = 1$ h.

$$P_{\text{dis mot}} = \frac{E_{\text{mot}}}{t}(1-\eta_{\text{e-m}}) = 670{,}7\ \text{W}$$

La potència mitjana dissipada al reductor es pot determinar a partir de l'energia que se li subministra durant $t = 1$ h.

$$P_{\text{dis red}} = \frac{E_{\text{mot}}\eta_{\text{e-m}}}{t}(1-\eta_{\text{r}}) = 301{,}8\ \text{W}$$

c) El parell mitjà a l'entrada del reductor es pot determinar a partir de l'energia que se li subministra:

$$T_{\text{entrada}} = \frac{P_{\text{entrada}}}{\omega_{\text{mot}}} = \frac{P_{\text{mot}}\ \eta_{\text{e-m}}}{\omega_{\text{mot}}} = \frac{E_{\text{mot}}\ \eta_{\text{e-m}}}{t\,\omega_{\text{mot}}} = 6{,}672\ \text{N·m}$$

El parell mitjà a la sortida del reductor es pot determinar com:

$$T_{\text{sortida}} = \frac{P_{\text{sortida}}}{\tau\ \omega_{\text{mot}}} = \frac{P_{\text{mot}}\ \eta_{\text{e-m}}\eta_{\text{r}}}{\tau\ \omega_{\text{mot}}} = \frac{E_{\text{mot}}\ \eta_{\text{e-m}}\eta_{\text{r}}}{t\,\tau\ \omega_{\text{mot}}} = 70{,}05\ \text{N·m}$$

d) Si durant la posada en marxa no es dipositen paquets sobre la cinta, l'aplicació del principi de conservació de l'energia en versió diferencial al sistema cinta condueix a:

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{aculumada}} \ \rightarrow\ P_{\text{mot}}\ \eta_{\text{r}} = P_{\text{rp}} + \dot{E}_{\text{c}}$$

$$T_{\text{m}}\ \omega\ \eta_{\text{r}} = F_{\text{rp}}\ v + m_{\text{cinta}}\ v\ a$$

El valor de l'acceleració de la cinta quan $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 0{,}5$ es determina a partir de l'expressió anterior imposant a l'expressió de T_{m} aquesta condició. Així doncs:

$$a = \frac{T_{\text{m}}\ \eta_{\text{r}} - F_{\text{rp}}\ \tau\ \dfrac{d}{2}}{m_{\text{cinta}}\ \tau\ \dfrac{d}{2}} = 2{,}212\ \text{m/s}^2.$$