Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Teoria de Màquines i Mecanismes

Exàmens Curs 2021-2022

Lluïsa Jordi Nebot

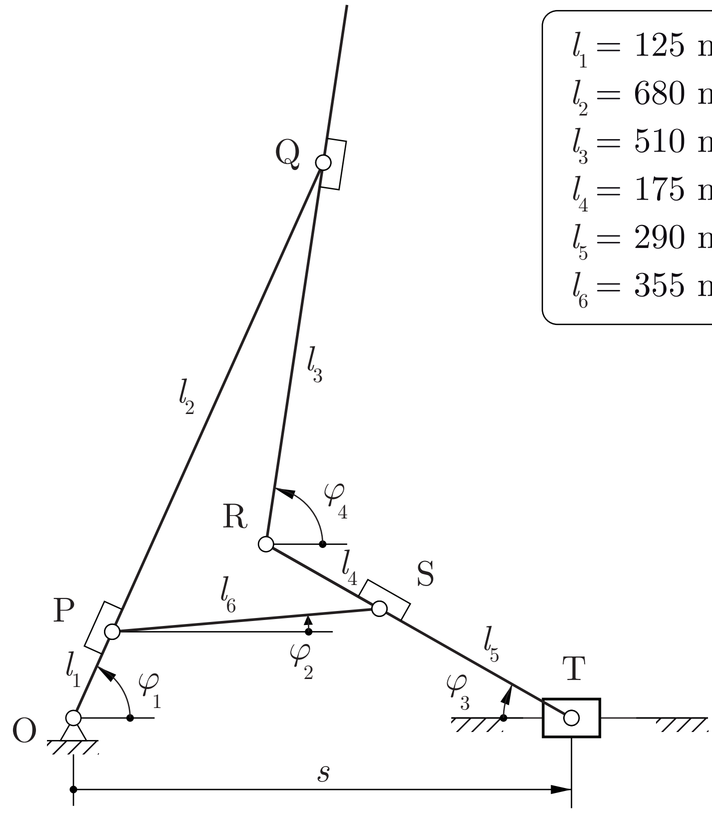
Joan Puig Ortiz

Enrique Zayas Figueras

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [**6 punts**]



$l_1 = 125$ mm
$l_2 = 680$ mm
$l_3 = 510$ mm
$l_4 = 175$ mm
$l_5 = 290$ mm
$l_6 = 355$ mm

La fotografia i l'esquema de la figura corresponen al mecanisme de plegament lateral d'un cotxet de passeig de criatura.

La roda del darrera es modelitza com una articulació fixa a terra i la roda del davant com una corredora que pot lliscar sobre el terra.

Per analitzar el mecanisme, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

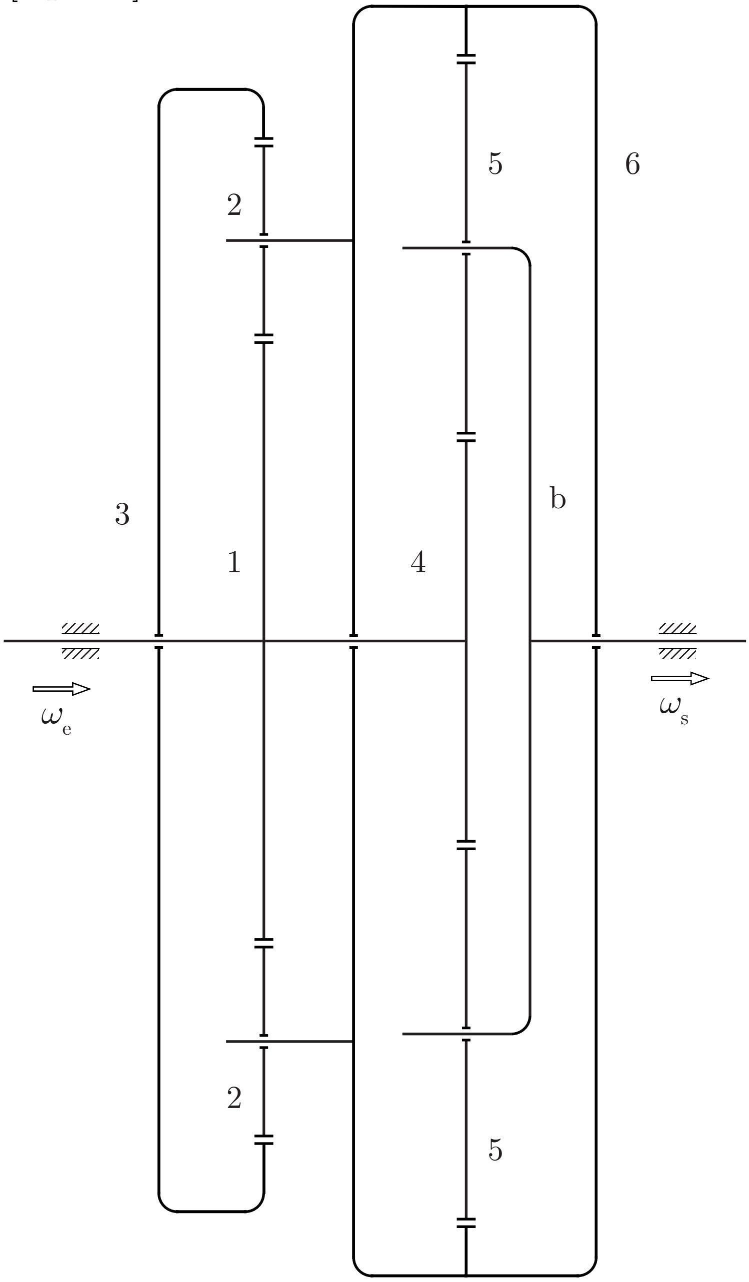
b) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi_q}$.

c) Els centres instantanis de rotació $\mathrm{I_{RT/OQ}}$ i $\mathrm{I_{RT/terra}}$ de la barra RT respecte la barra OQ i respecte al terra, respectivament.

Fent atenció al quadrilàter PQRS,

d) Comenteu quin angle és màxim en la configuració en la qual les barres QR i RS estan alineades.

Exercici 2 [4 punts]



$z_1 = 40$
$z_2 = 13$
$z_3 = 66$
$z_4 = 27$
$z_5 = 25$
$z_6 = 77$

Per a l'estudi del tren d'engranatges de la figura s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_{14}, \omega_3, \omega_6, \omega_b\}^T$. Determineu:

a) Les equacions cinemàtiques d'enllaç entre les velocitats generalitzades.

b) Els valors de les relacions de transmissió $\tau = \omega_s \,/\, \omega_e$ que es poden obtenir quan $\omega_3 = 0$ i quan $\omega_6 = 0$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la velocitat angular de la barra OQ, $\dot{\varphi}_1 = 0$, el punt Q queda fix a terra; per tant, la distància entre Q i T queda fixada i el triangle QRT esdevé indeformable. Tenint en compte que la distància PS és constant es conclou que el mecanisme té 1 grau de llibertat.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dona un número igual a 1.

$5 \cdot (\text{sòlids mòbils}) \times 3 - 6 \cdot (\text{articulacions}) \times 2 - 1 \cdot (\text{p. prismàtic}) \times 2 = 1.$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que s'obtenen, per exemple, imposant el tancament dels anells OPSTO i OQRTO.

$$\begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_6 \cos\varphi_2 + l_5 \cos\varphi_3 - s = 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 + l_6 \sin\varphi_2 - l_5 \sin\varphi_3 = 0 \\ (l_1 + l_2)\cos\varphi_1 - l_3 \cos\varphi_4 + (l_4 + l_5)\cos\varphi_3 - s = 0 \\ (l_1 + l_2)\sin\varphi_1 - l_3 \sin\varphi_4 - (l_4 + l_5)\sin\varphi_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & -l_6 \sin\varphi_2 & -l_5 \sin\varphi_3 & 0 & -1 \\ l_1 \cos\varphi_1 & l_6 \cos\varphi_2 & -l_5 \cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ -(l_1 + l_2)\sin\varphi_1 & 0 & -(l_4 + l_5)\sin\varphi_3 & l_3 \sin\varphi_4 & -1 \\ (l_1 + l_2)\cos\varphi_1 & 0 & -(l_4 + l_5)\cos\varphi_3 & -l_3 \cos\varphi_4 & 0 \end{pmatrix}$$

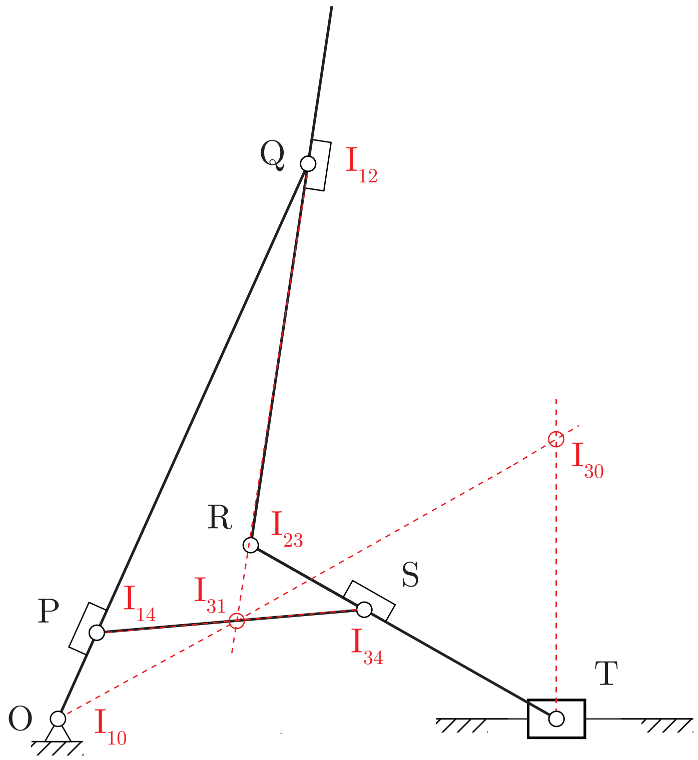
c) Per a la resolució d'aquest apartat s'empra la nomenclatura següent:

Terra: sòlid 0; OQ: sòlid 1; QR: sòlid 2; RT: sòlid 3; PS: sòlid 4.

L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids 1, 2 i 3 indica que el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte la barra 1 –I_{31}– es troba sobre QR.

L'aplicació del teorema dels tres centres a la terna de sòlids 1, 3 i 4 indica que el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte la barra 1 –I_{31}– es troba sobre PS.

Per tant, $\mathrm{I}_{\mathrm{RT/OQ}} \equiv \mathrm{I}_{31}$ es troba en la intersecció de la prolongació de la recta QR amb la recta PS (veure la figura adjunta).



El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids 0, 1 i 3 indica que el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte el terra –I_{30}– es troba sobre la recta que uneix els punts $O \equiv I_{10}$ i I_{31}.

Per altra banda, es coneix la direcció de la velocitat del punt T, que és horitzontal. En conseqüència, el centre instantani de rotació de la barra 3 respecte al terra –I_{30}– s'ha de trobar sobre la vertical que passa pel punt T.

Per tant, $I_{RT/terra} \equiv I_{30}$ es troba en la intersecció de la recta que uneix O i I_{31} amb la recta vertical que passa per T.

d) El quadrilàter articulat PQRS no té cap barra fixa a terra. Quan les barres QR i RS estan alineades, l'angle que és màxim és l'angle oposat al costat QS del triangle PQS que es forma amb aquesta alineació. Per tant, l'angle que és màxim en la configuració indicada és l'angle que formen la barra PQ i la barra PS, és a dir $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per dos trens epicicloidals simples:

– Tren 1: 1 (planeta), 2 (satèl·lit), 3 (corona) i 6 (braç)
– Tren 2: 4 (planeta), 5 (satèl·lit), 6 (corona) i b (braç).

Per a cadascun del trens es pot determinar l'equació que relaciona les velocitats angulars dels elements que giren entorn de l'eix fix, des de la referència fixa al braç corresponent (equació de Willis).

Si en el primer tren es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 3 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{3/\mathrm{b1}}}{\omega_{1/\mathrm{b1}}} = \frac{\omega_3 - \omega_{\mathrm{b1}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{b1}}} \quad \rightarrow \quad \tau_1\,\omega_1 + \left(1-\tau_1\right)\omega_{\mathrm{b1}} - \omega_3 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_1 = (\pm)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_3} = -\frac{20}{33} = -0{,}6061.$$

Si en el segon tren es pren com a entrada la roda 4 i com a sortida la roda 6 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{6/\mathrm{b2}}}{\omega_{4/\mathrm{b2}}} = \frac{\omega_6 - \omega_{\mathrm{b2}}}{\omega_4 - \omega_{\mathrm{b2}}} \quad \rightarrow \qquad \tau_2\,\omega_4 + \big(1-\tau_2\big)\omega_{\mathrm{b2}} - \omega_6 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \big(\pm\big)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_4 \cdot z_5}{z_5 \cdot z_6} = -\frac{27}{77} = -0,3506.$$

La unió dels dos trens fa que les rodes 1 i 4 siguin solidàries: $\omega_1 = \omega_4 = \omega_{14}$; i que el braç del primer tren sigui solidari a la roda 6: $\omega_{\mathrm{b1}} = \omega_6$. En conseqüència es pot escriure:

$$\tau_1\,\omega_{14} + \big(1-\tau_1\big)\omega_6 - \omega_3 = 0$$
$$\tau_2\,\omega_{14} + \big(1-\tau_2\big)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_6 = 0$$

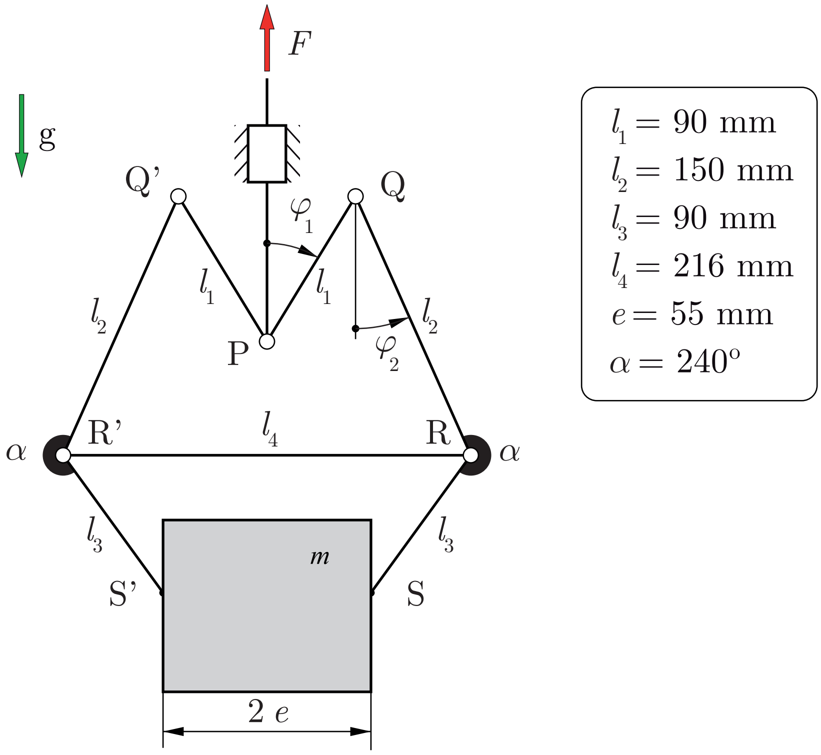
b) Tenint en compte que $\omega_{\mathrm{e}} = \omega_{14}$ i que $\omega_{\mathrm{s}} = \omega_{\mathrm{b}}$ es poden determinar les relacions de transmissió:

$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_{\mathrm{b}}}{\omega_{14}}\right|_{\omega_3=0} = \frac{\tau_2 - \dfrac{\tau_1}{\tau_1 - 1}}{\tau_2 - 1} = 0,5390.$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_{\mathrm{b}}}{\omega_{14}}\right|_{\omega_6=0} = \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1} = 0,2596.$$

– Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
– Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
– Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
– A l'hora d'entregar introduïu només els fulls quadriculats en el sobre.

Exercici 1 [3 punts]



La grapa de la figura es dissenya per elevar càrregues de diferents amplades quan s'estira amb una força F aplicada en el punt P.

Es consideren negligibles totes les masses, excepte la de la càrrega m, i totes les resistències passives, excepte el frec en els punts de contacte, S i S', entre la grapa i la càrrega.

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica i dinàmica de la grapa, s'empren les coordenades generalitzades indicades a la figura. Determineu:

a) La relació entre les coordenades φ_1 i φ_2.

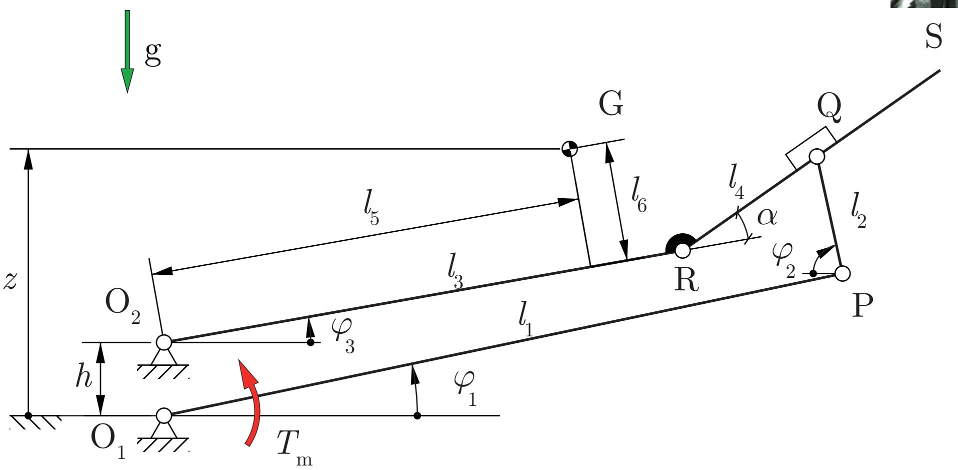
Si la càrrega s'eleva a velocitat constat, determineu:

b) La força, F_{PQ}, a la qual està sotmesa la barra PQ.

c) La força normal que la grapa fa sobre la càrrega en el punt S (suggeriment: penseu en el diagrama de cos lliure del sòlid QRS).

d) L'expressió del coeficient de frec mínim, μ_{min}, en els punts de contacte entre la grapa i la càrrega per tal que no ho hagi lliscament. Determineu-ne el valor per a les dimensions indicades quan $\varphi_1 = 31{,}61^o$ i $\varphi_2 = 23{,}92^o$. Comenteu si és una solució adequada basar el funcionament de la grapa en el frec.

Exercici 2 [3,5 punts]



$l_1 = 520$ mm
$l_2 = 90$ mm
$l_3 = 395$ mm
$l_4 = 100$ mm
$l_5 = 325$ mm
$l_6 = 90$ mm
$h = 55$ mm
$m = 35$ kg

La figura mostra la fotografia i l'esquema de símbols simplificat del capçal d'un llit articulat accionat per un motor.

Es considera que les barres del mecanisme són de massa negligible i que els pesos del matalàs i de la persona usuària es reparteixen proporcionalment entre les diverses parts del llit articulat. Tots els frecs es consideren negligibles.

En el seu funcionament, a partir de l'angle $\alpha = 25^{\circ}$, les barres O_2R i RS es mouen conjuntament, com si fossin un únic sòlid.

S'analitza el mecanisme quan les barres O_2R i RS es mouen solidàriament; en aquest cas, es considera que els pesos corresponents es concentren en el punt G i equivalen a una massa $m = 35$ kg.

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica i dinàmica del mecanisme, s'empra el conjunt de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) Les equacions geomètriques d'enllaç entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi_q}$.

b) L'alçada, z, i la velocitat vertical $\dot{z}$, del punt G.

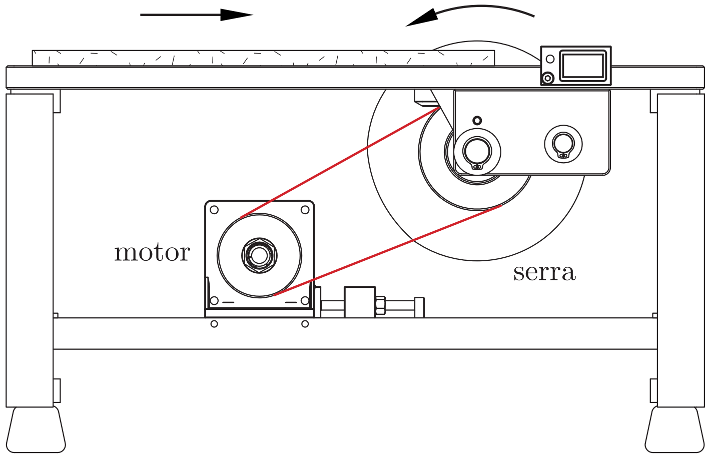
c) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ i de la configuració.

d) L'expressió del parell T_{m} necessari per elevar, en règim quasiestàtic, el capçal del llit quan l'usuari hi és estirat. Determineu-ne el valor per a la configuració $\varphi_1 = 15^{\circ}$; $\varphi_2 = 62{,}46^{\circ}$; $\varphi_3 = 14{,}11^{\circ}$.

Exercici 3 [3,5 punts]

Un motor elèctric acciona per mitjà d'una transmissió per corretges una serra circular per tallar taulons de fusta.

Quan la serra talla taulons del màxim gruix possible, la força de tall genera un parell resistent T_s a l'eix de la serra.



Les característiques de cadascun dels elements són:

Motor:
- Inèrcia reduïda a l'eix m $I_m = 0{,}06$ kg·m² (inclou la de la politja inferior)
- Potència nominal $P_{m\ nom} = 3$ kW
- Velocitat en règim nominal $n_{m\ nom} = 2850$ min⁻¹
- Rendiment electromecànic $\eta_{e\text{-}m} = 0{,}8$

Transmissió per corretges:
- Relació de transmissió $\tau = 0{,}7$

Serra:
- Inèrcia reduïda a l'eix s $I_s = 0{,}2$ kg·m² (inclou la de la politja superior)
- Parell resistent durant el tall $T_s = 10$ N·m

El temps per passar del repòs a la velocitat nominal és $t_{arr} = 0{,}5$ s i el temps per aturar-se en buit i amb el motor desconnectat, partint de velocitat nominal, és $t_{atu} = 20$ s.

Es suposa que el rendiment i les resistències passives són independents de la velocitat i de l'estat de càrrega de la màquina. Determineu.

a) La inèrcia de la màquina, I_{red}, reduïda a la rotació de l'eix m.

b) Les resistències passives de la màquina, T_{rp}, reduïdes a la rotació de l'eix m.

c) La potència elèctrica, $P_{e\ buit}$, consumida pel motor quan la serra està en marxa en buit girant a velocitat nominal.

Per tallar un tauló del màxim gruix possible es realitza el següent procés:

1. Posar en marxa la màquina en buit, amb acceleració constant, $t_{arr} = 0{,}5$ s.
2. Col·locar adequadament el tauló, $t_{pre} = 5$ s.
3. Serrar el tauló, que provoca el parell resistent T_s, $t_{tall} = 20$ s.

4. Retirar el tauló, sense parar la serra, $t_{\mathrm{post}} = 2{,}5$ s.
5. Aturar la màquina, $t_{\mathrm{atu}} = 20$ s.

Determineu:

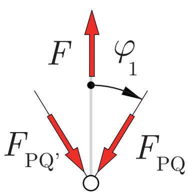
d) L'energia elèctrica consumida en aquest procés $E_{\mathrm{e\ procés}}$. Indiqueu i expliqueu clarament les hipòtesis i el procediment que utilitzeu a cada pas.

Solució Exercici 1

a) A partir de la distància entre els punts S i S' es pot escriure:

$$2\,l_1 \sin\varphi_1 + 2\,l_2 \sin\varphi_2 - l_4 = 0 \;\rightarrow\; \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{l_4 - 2\,l_2 \sin\varphi_2}{2\,l_1}\right).$$

b) Per la simetria del mecanisme les forces exercides per les barres PQ i PQ' són iguals. En ser totes les barres de massa negligible i només amb articulacions en els extrems, la força que fan té la direcció de la pròpia barra. El diagrama de cos lliure de l'eix de les articulacions P, mostrat a la figura, condueix a:

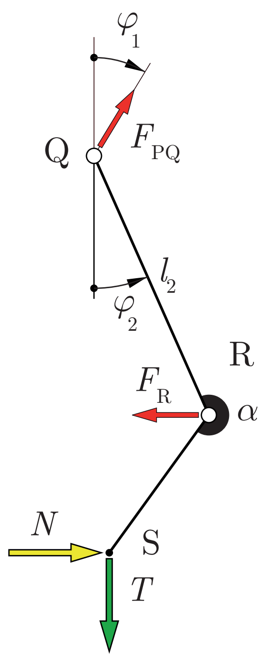


$$F = 2\,F_{PQ}\cos\varphi_1 \;\rightarrow\; F_{PQ} = \frac{F}{2\cos\varphi_1}.$$

Per altra banda, de l'anàlisi de tot el sistema, es dedueix fàcilment que $F = m\,g$. Per tant:

$$F_{PQ} = \frac{m\,g}{2\cos\varphi_1}.$$

c) El diagrama de cos lliure del sòlid QRS és el mostrat a la figura.



L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment a QRS en direcció vertical condueix a:

$$T = F_{PQ}\cos\varphi_1 \quad \rightarrow\; T = \frac{F}{2} = \frac{m\,g}{2}.$$

L'aplicació del teorema del moment cinètic a QRS i en el punt R porta a:

$$F_{PQ}\,l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - T\,l_3 \sin(\alpha - 180 - \varphi_2) - N\,l_3 \cos(\alpha - 180 - \varphi_2) = 0$$

Operant s'obté:

$$N = \frac{m\,g}{2}\left(\frac{l_3 \sin(\varphi_2 - \alpha)\cos\varphi_1 - l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{l_3 \cos(\varphi_2 - \alpha)\cos\varphi_1}\right).$$

d) El coeficient de frec mínim μ_{min}, en els punts S i S' per tal que no ho hagi lliscament s'obté a partir d'imposar la condició de lliscament imminent: $T = \mu_{\text{min}} \cdot N$.

A partir de les expressions trobades a l'apartat anterior, s'obté:

$$\mu_{\min} = \left(\frac{l_3 \cos(\varphi_2 - \alpha)\cos\varphi_1}{l_3 \sin(\varphi_2 - \alpha)\cos\varphi_1 - l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \right).$$

Per a les mides i la configuració demanada, el valor és $\mu_{\min} = 0,7887$.

A partir del resultat obtingut, es conclou que és arriscat basar el funcionament de la grapa en el frec ja que el valor obtingut és gran i no assolible amb els materials habituals.

Solució Exercici 2

a) Les equacions d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $\mathrm{O_1PQRO_2O_1}$ i la matriu jacobiana s'obté derivant-les respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \cos\varphi_2 - l_4 \cos(\varphi_3 + \alpha) - l_3 \cos\varphi_3 = 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 - l_4 \sin(\varphi_3 + \alpha) - l_3 \sin\varphi_3 - h = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & l_2 \sin\varphi_2 & l_4 \sin(\varphi_3 + \alpha) + l_3 \sin\varphi_3 \\ l_1 \cos\varphi_1 & l_2 \cos\varphi_2 & -l_4 \cos(\varphi_3 + \alpha) - l_3 \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

b) La velocitat $\dot{z}$ del punt G es pot obtenir com la derivada temporal de la coordenada vertical z.

$$z = h + l_5 \sin\varphi_3 + l_6 \cos\varphi_3 \qquad \rightarrow \qquad \dot{z} = \dot{\varphi}_3 \left(l_5 \cos\varphi_3 - l_6 \sin\varphi_3 \right)$$

c) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ es pot obtenir, per exemple, a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} = -\left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{d}}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}\, \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{t}}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} l_2 \sin\varphi_2 & l_4 \sin(\varphi_3 + \alpha) + l_3 \sin\varphi_3 \\ l_2 \cos\varphi_2 & -l_4 \cos(\varphi_3 + \alpha) - l_3 \cos\varphi_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 \\ l_1 \cos\varphi_1 \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + l_4 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \alpha)}$$

d) Per determinar el parell T_{m} necessari per elevar, en règim quasiestàtic, el capçal del llit quan l'usuari hi és estirat es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals. Es pren com sistema el mecanisme i es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \quad \rightarrow \quad T_\text{m}\dot{\varphi}_1^* - m\,\text{g}\,\dot{z}^* = 0 \quad \rightarrow \quad T_\text{m} = m\,\text{g}\frac{\dot{z}^*}{\dot{\varphi}_1^*}$$

La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^*$ i $\dot{z}^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant amb les relacions trobades als apartats *b*) i *c*) s'obté l'expressió del parell T_m.

$$T_\text{m} = m\,\text{g}\frac{l_1 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\left(l_5 \cos\varphi_3 - l_6 \sin\varphi_3\right)}{l_3 \sin\left(\varphi_2 + \varphi_3\right) + l_4 \sin\left(\varphi_2 + \varphi_3 + \alpha\right)}.$$

Amb els valors numèrics donats $T_\text{m} = 106{,}0$ N·m.

Solució Exercici 3

a) La inèrcia de la màquina I_red reduïda a la rotació de l'eix m s'obté per identificació en el càlcul de l'energia cinètica de tota la màquina.

$$E_\text{c} = E_\text{c motor} + E_\text{c serra} \quad \rightarrow \quad E_\text{c} = \frac{1}{2} I_\text{m}\,\omega_\text{m}^2 + \frac{1}{2} I_\text{s}\,\omega_\text{s}^2 = \frac{1}{2}\left(I_\text{m} + I_\text{s}\tau^2\right)\omega_\text{m}^2$$

$$I_\text{red} = I_\text{m} + I_\text{s}\tau^2 = 0{,}158 \text{ kg·m}^2$$

b) Per determinar les resistències passives de la màquina, T_rp, reduïdes a la rotació de l'eix m es pot aplicar el principi de conservació de l'energia en versió diferencial a la part mecànica del sistema. En l'etapa d'aturada en buit i amb el motor desconnectat les úniques forces que fan potència no nul·la són les resistències passives.

$$P_\text{subministrada} = P_\text{cedida} + P_\text{acumulada} \quad \rightarrow \quad 0 = P_\text{rp} + \dot{E}_\text{c}$$

$$0 = T_\text{rp}\,\omega_\text{m} + I_\text{red}\omega_\text{m}\alpha_\text{m} \quad \rightarrow \quad \alpha_\text{m} = -\frac{T_\text{rp}}{I_\text{red}}$$

Com que les resistències passives es suposen independents de la velocitat i de l'estat de càrrega de la màquina, el resultat mostra que l'acceleració de frenada és constant. Es coneix el temps d'aturada, t_atu, i per tant s'obté:

$$\alpha_\text{m} = -\frac{\omega_\text{m}}{t_\text{atu}} \quad \rightarrow \quad T_\text{rp} = \frac{I_\text{red}\,\omega_\text{m}}{t_\text{atu}} = 2{,}358 \text{ N·m}$$

c) Quan la serra està en marxa en buit girant a la velocitat nominal, es suposa que el règim és estacionari i per tant només cal vèncer les resistències passives. Si s'aplica el principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema s'obté:

$$P_\text{subministrada} = P_\text{cedida} \rightarrow P_\text{e buit}\,\eta_\text{e-m} = P_\text{rp} \rightarrow P_\text{e buit} = \frac{P_\text{rp}}{\eta_\text{e-m}} = \frac{T_\text{rp}\,\omega_\text{m}}{\eta_\text{e-m}} = 879{,}6 \text{ W}$$

d) L'energia elèctrica consumida en aquest procés $E_{\text{e procés}}$ és la suma de l'energia consumida en cadascuna de les etapes.

1. La posada en marxa es fa amb acceleració constant α_1. Si s'aplica el principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema en aquesta etapa:

   $$E_{\text{subministrada}} = E_{\text{cedida}} + E_{\text{acumulada}} \rightarrow E_{\text{e1}}\,\eta_{\text{e-m}} = E_{\text{rp}} + \Delta E_{\text{c}}$$

   $$E_{\text{e1}} = \frac{1}{\eta_{\text{e-m}}}\left(T_{\text{rp}}\,\varphi_{\text{m1}} + \frac{1}{2}I_{\text{red}}\,\omega_{\text{m}}^2\right)$$

   Com que l'acceleració és constant, $\alpha_1 = \dfrac{\omega_{\text{m}}}{t_{\text{arr}}}$ i $\varphi_{\text{m1}} = \dfrac{1}{2}\alpha_1 t_{\text{arr}}^2$ per tant

   $$E_{\text{e1}} = \frac{1}{\eta_{\text{e-m}}}\frac{1}{2}\left(T_{\text{rp}}\,t_{\text{arr}} + I_{\text{red}}\,\omega_{\text{m}}\right)\omega_{\text{m}} = 9,016\ \text{kJ}$$

2. La serra funciona en buit. Per tant, només cal vèncer les resistències passives i es pot aprofitar el resultat de l'apartat *c*).

   $$E_{\text{e2}} = P_{\text{e buit}}\,t_{\text{pre}} = 4,398\ \text{kJ}$$

3. Mentre es serra el tauló es genera el parell resistent T_{s} a l'eix de la serra. Si es suposa que la velocitat és la nominal i s'aplica el principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema en aquesta etapa:

   $$E_{\text{subministrada}} = E_{\text{cedida}} + E_{\text{acumulada}} \rightarrow E_{\text{e3}}\,\eta_{\text{e-m}} = E_{\text{rp}} + E_{\text{tall}}$$

   $$E_{\text{e31}} = \frac{1}{\eta_{\text{e-m}}}\left(T_{\text{rp}}\,\varphi_{\text{m3}} + T_{\text{s}}\,\varphi_{\text{s}}\right) = \frac{1}{\eta_{\text{e-m}}}\left(T_{\text{rp}}\,\omega_{\text{m}}t_{\text{tall}} + T_{\text{s}}\,\omega_{\text{m}}\tau\,t_{\text{tall}}\right) = 69,82\ \text{kJ}$$

4. La serra funciona en buit. Per tant, només cal vèncer les resistències passives i es pot aprofitar el resultat de l'apartat *c*).

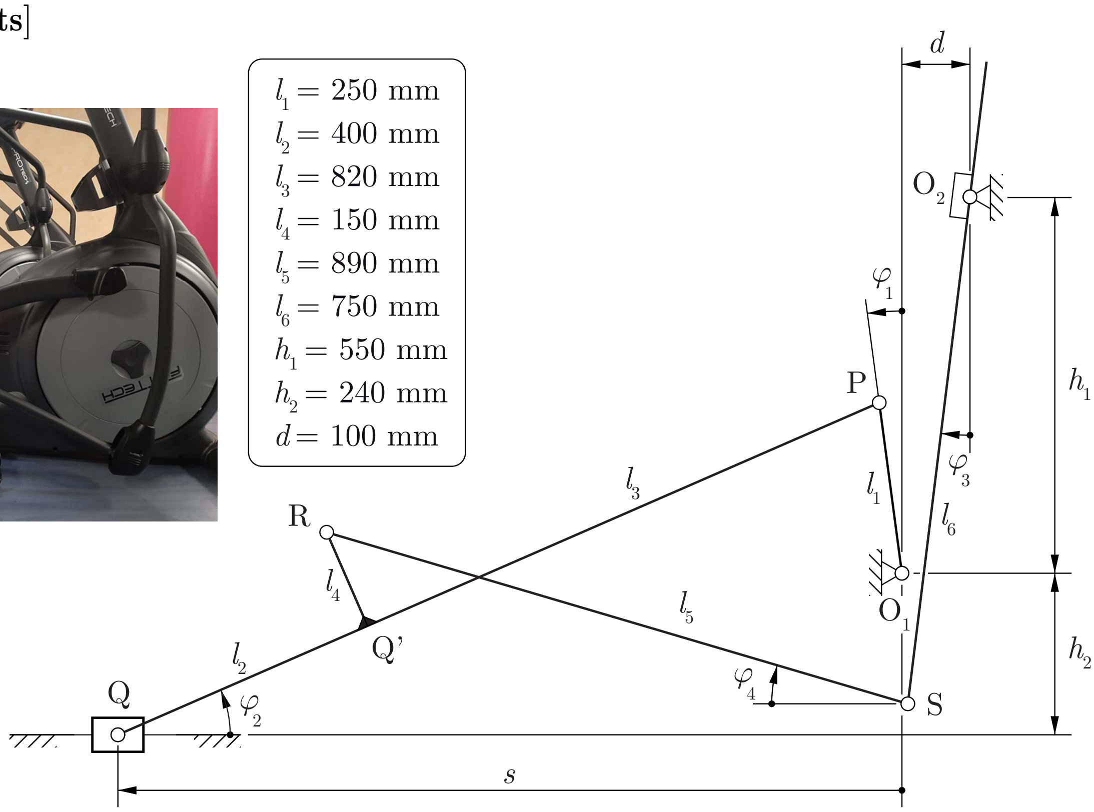
   $$E_{\text{e4}} = P_{\text{e buit}}\,t_{\text{post}} = 2,199\ \text{kJ}$$

5. En l'etapa d'aturada no hi ha consum elèctric ja que es realitza amb el motor desconnectat.

Per tant, l'energia consumida en tot el procés és $E_{\text{e procés}} = 85{,}43\ \text{kJ} = 23{,}73\ \text{W·h}$.

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [**6 punts**]



La figura mostra la fotografia d'una màquina habitual en els gimnasos (bicicleta el·líptica) i l'esquema de símbols simplificat d'un dels mecanismes laterals. El pedal, no representat a l'esquema, és solidari a la biela RS.

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica del mecanisme, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

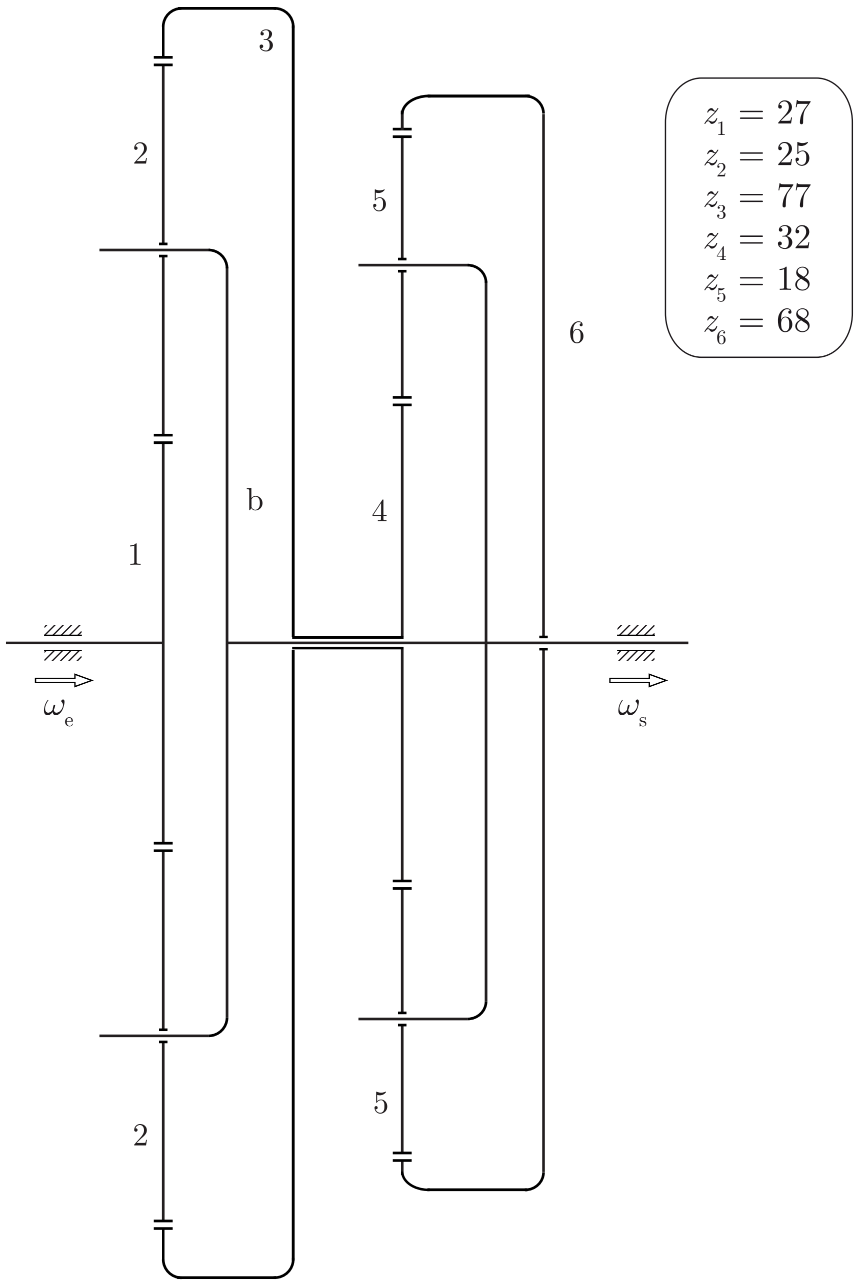
b) Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

c) Els centres instantanis de rotació $\mathrm{I_{PQ}}$ i $\mathrm{I_{RS}}$ de les bieles PQ i RS respecte el terra.

d) L'amplitud Δs del moviment de la corredora Q.

e) La relació de velocitats $\dot{\varphi}_2 \,/\, \dot{\varphi}_1$ en la configuració de punt mort corresponent al màxim de la coordenada s.

Exercici 2 [4 punts]



Per a l'estudi del tren d'engranatges de la figura s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_1, \omega_{34}, \omega_6, \omega_b\}^T$. Determineu:

a) Les equacions cinemàtiques d'enllaç entre les velocitats generalitzades.

b) Els valors de les relacions de transmissió $\tau = \omega_s \,/\, \omega_e$ que es poden obtenir quan $\omega_{34} = 0$ i quan $\omega_6 = 0$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la translació de la corredora Q es forma un triangle $\mathrm{O_1PQ}$ no deformable i immòbil. En conseqüència, el punt R queda aturat per pertànyer al sòlid QP. Amb el punt R quiet, es forma un altre triangle indeformable $\mathrm{O_2SR}$ i el mecanisme queda totalment aturat. Per tant, el mecanisme té 1 grau de llibertat ja que aturant una única velocitat queda en repòs.
De fet, el mecanisme és un pistó–biela–manovella amb un grup d'Assur, format per les dues barres $\mathrm{O_2S}$ i SR unides mitjançant tres articulacions.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dona un número igual a 1.

$$5(\text{sòlids mòbils})\times 3 - 6(\text{articulacions})\times 2 - 1(\text{p. prismàtic})\times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent, cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que es poden obtenir, per exemple, imposant el tancament dels anells $\mathrm{O_1PQO_1}$ i $\mathrm{O_1PRSO_2O_1}$.

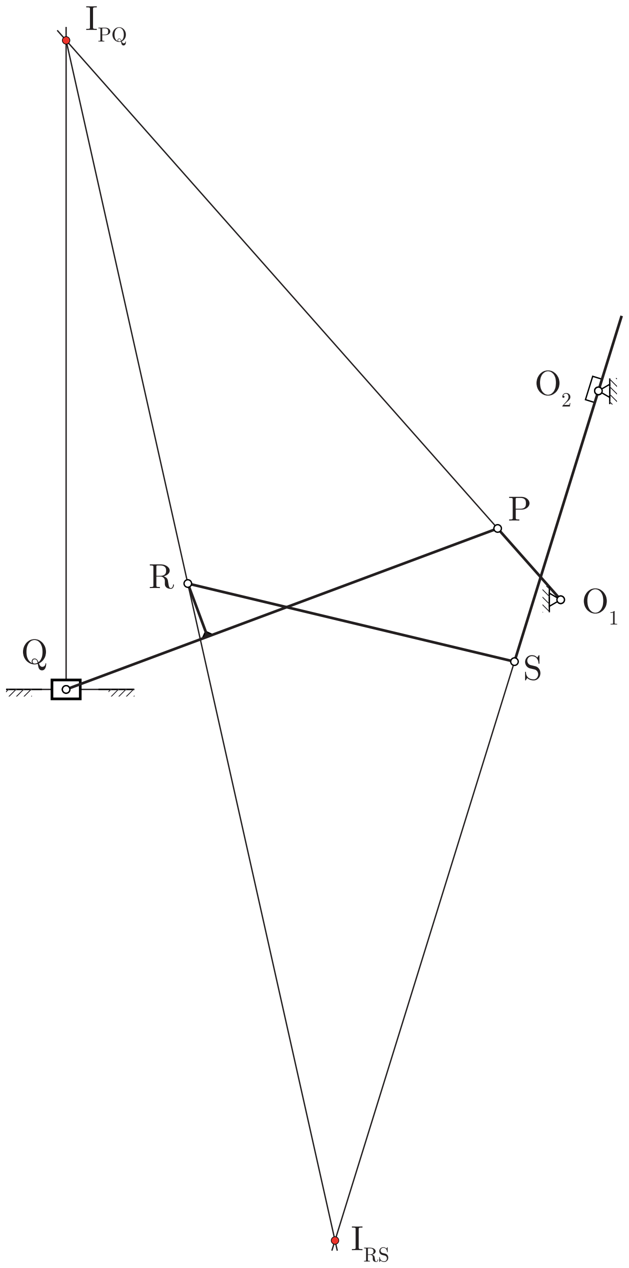
$$\begin{cases} l_1\sin\varphi_1 + \left(l_2+l_3\right)\cos\varphi_2 - s = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 - \left(l_2+l_3\right)\sin\varphi_2 + h_2 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 + l_3\cos\varphi_2 + l_4\sin\varphi_2 - l_5\cos\varphi_4 - l_6\sin\varphi_3 + d = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 - l_3\sin\varphi_2 + l_4\cos\varphi_2 - l_5\sin\varphi_4 + l_6\cos\varphi_3 - h_1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} l_1\cos\varphi_1 & -\left(l_2+l_3\right)\sin\varphi_2 & 0 & 0 & -1 \\ -l_1\sin\varphi_1 & -\left(l_2+l_3\right)\cos\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_1\cos\varphi_1 & -l_3\sin\varphi_2 + l_4\cos\varphi_2 & -l_6\cos\varphi_3 & l_5\sin\varphi_4 & 0 \\ -l_1\sin\varphi_1 & -l_3\cos\varphi_2 - l_4\sin\varphi_2 & -l_6\sin\varphi_3 & -l_5\cos\varphi_4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) El centre instantani de rotació de la biela PQ es pot determinar a partir de conèixer la direcció de la velocitat de dos dels seus punts. El punt P té velocitat perpendicular a la recta $\mathrm{O_1P}$. El punt Q té velocitat horitzontal.

Així doncs, el centre instantani de rotació $\mathrm{I_{PQ}}$ de la biela PQ es troba a la intersecció de la prolongació de la recta $\mathrm{O_1P}$ amb la recta vertical que passa per Q, tal com mostra la figura.

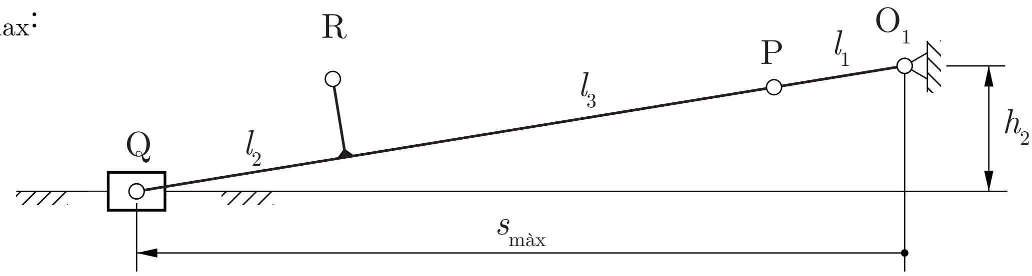


El centre instantani de rotació de la biela RS es pot determinar sabent que el punt S té velocitat perpendicular a la recta O_2S. El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra, biela PQ i biela RS indica que el centre instantani de rotació I_{RS} de la biela RS respecte el terra es troba sobre la recta que uneix els punts I_{PQ} i R.

Així doncs, el punt I_{RS} es troba a la intersecció de la prolongació de la recta O_2S amb la recta que uneix els punts I_{PQ} i R, tal com mostra la figura.

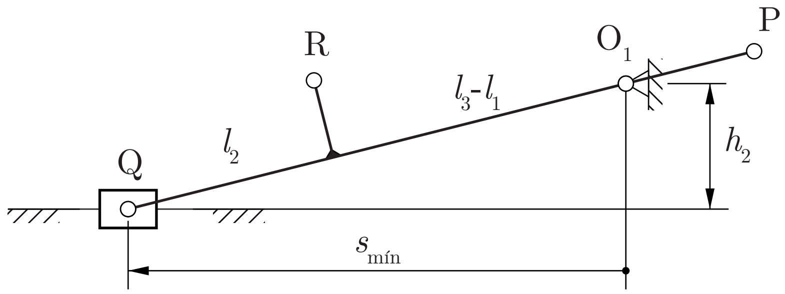
d) L'amplitud del moviment Δs de la corredora correspon a la distància que hi ha entre els punts morts de la coordenada s. Els valors màxim s_{max} i mínim s_{min} corresponen a les configuracions en les quals els punts O_1, P, i Q es troben alineats, tal com mostren les figures.

Configuració de s_{max}:



$$s_{max} = \sqrt{\left(l_2 + l_3 + l_1\right)^2 - h_2^2}$$

Configuració de $s_{\min}$:



$s_{\min} = \sqrt{\left(l_2 + l_3 - l_1\right)^2 - h_2^2}$. Per tant, $\Delta s = 510{,}4$ mm.

e) En la configuració on s és màxima $\dot{s} = 0$. Per tant, el punt Q és el centre instantani de rotació de la biela PQ.
La velocitat del punt P com a punt de la barra O_1P és $v(\mathrm{P}) = l_1\,\dot{\varphi}_1$ i com a punt de la barra QP és $v(\mathrm{P}) = -\left(l_2 + l_3\right)\dot{\varphi}_2$. Per tant:

$$l_1\,\dot{\varphi}_1 = -\left(l_2 + l_3\right)\dot{\varphi}_2 \quad \rightarrow \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = -\frac{l_1}{l_2 + l_3} = -0{,}2049.$$

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per dos trens epicicloidals simples:

– Tren 1: 1 (planeta), 2 (satèl·lit), 3 (corona) i b (braç)
– Tren 2: 4 (planeta), 5 (satèl·lit), 6 (corona) i b (braç).

Per a cadascun del trens es pot determinar l'equació que relaciona les velocitats angulars dels elements que giren entorn de l'eix fix, des de la referència fixa al braç corresponent (equació de Willis).

Si en el primer tren es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 3 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{3/\mathrm{b1}}}{\omega_{1/\mathrm{b1}}} = \frac{\omega_3 - \omega_{\mathrm{b1}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{b1}}} \quad \rightarrow \quad \tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\mathrm{b1}} - \omega_3 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_1 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\mathrm{conductores}}}{\prod z_{\mathrm{conduides}}} = -\frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_3} = -\frac{27}{77} = -0,3506.$$

Si en el segon tren es pren com a entrada la roda 4 i com a sortida la roda 6 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{6/\mathrm{b2}}}{\omega_{4/\mathrm{b2}}} = \frac{\omega_6 - \omega_{\mathrm{b2}}}{\omega_4 - \omega_{\mathrm{b2}}} \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_4 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\mathrm{b2}} - \omega_6 = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\mathrm{conductores}}}{\prod z_{\mathrm{conduides}}} = -\frac{z_4 \cdot z_5}{z_5 \cdot z_6} = -\frac{32}{68} = -0,4706.$$

La unió dels dos trens fa que les rodes 3 i 4 siguin solidàries: $\omega_3 = \omega_4 = \omega_{34}$ i que els braços dels dos trens siguin el mateix element: $\omega_{\mathrm{b1}} = \omega_{\mathrm{b2}} = \omega_{\mathrm{b}}$. En conseqüència es pot escriure:

$$\tau_1\,\omega_1 + \left(1 - \tau_1\right)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_{34} = 0$$
$$\tau_2\,\omega_{34} + \left(1 - \tau_2\right)\omega_{\mathrm{b}} - \omega_6 = 0$$

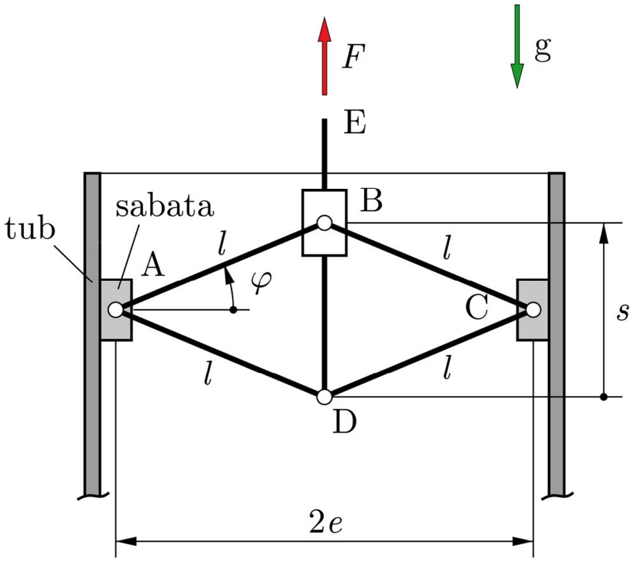
b) Tenint en compte que $\omega_{\mathrm{e}} = \omega_1$ i que $\omega_{\mathrm{s}} = \omega_{\mathrm{b}}$ es poden determinar les relacions de transmissió:

$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_{\mathrm{b}}}{\omega_1}\right|_{\omega_{34}=0} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - 1} = 0,2596.$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega_{\mathrm{e}}} = \left.\frac{\omega_{\mathrm{b}}}{\omega_1}\right|_{\omega_6=0} = \frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1\,\tau_2 - 1} = -0,1976.$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [**3,5 punts**]



$l = 130$ mm
$2e = 240$ mm
$F = 800$ N

La grapa de la figura es dissenya per elevar tubs cilíndrics de diferents diàmetres quan s'estira amb una força F en el punt E.

Es consideren negligibles totes les masses, excepte la del tub, i totes les resistències passives, excepte el frec entre les sabates i el tub.

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica i dinàmica de la grapa, s'empren les coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi,\ s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

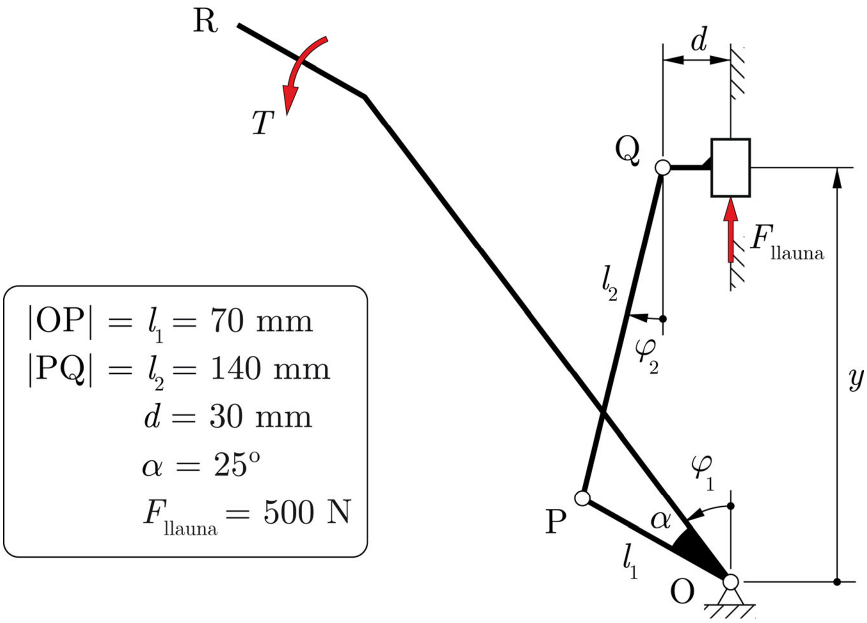
a) La relació entre les coordenades generalitzades.

b) L'expressió i el valor de la força normal N que la sabata rep del tub quan s'estira la barra DE amb la força F indicada.

c) El coeficient de frec mínim μ_{min} entre les sabates i el tub per tal de garantir que no es produeix lliscament sigui quin sigui el valor d'F.

d) Les forces F_{AB} i F_{AD} a les que estan sotmeses les barres AB i AD. Indiqueu si són de tracció o de compressió.

Exercici 2 [3,5 punts]



La figura mostra la fotografia i l'esquema d'una màquina aixafallaunes manual de paret, creada per reduir la mida de la llauna metàl·lica un cop buida i facilitar-ne el reciclatge.

Es considera que totes les masses de les barres i els frecs són negligibles.

Per al seu estudi cinemàtic i dinàmic, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, y\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) Les equacions geomètriques d'enllaç entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi_q}$.

b) Les velocitats $\dot{\varphi}_2$ i $\dot{y}$ en funció de $\dot{\varphi}_1$ i de la configuració.

c) El centre instantani de rotació de la biela PQ.

d) L'expressió del parell necessari T que s'ha d'aplicar al mànec (barra RO) per aixafar la llauna, si se suposa que ofereix una resistència constant F_{llauna} a ser aixafada. Determineu-ne el valor per a la configuració $\varphi_1 = 30^{\mathrm{o}}$ i $\varphi_2 = 11{,}26^{\mathrm{o}}$.

e) L'expressió de la força F_{PQ} a la qual està sotmesa la barra PQ i el seu valor per a la mateixa configuració de l'apartat anterior. Indiqueu si la barra PQ està sotmesa a tracció o a compressió.

Exercici 3 [**3 punts**]

Figura (a)

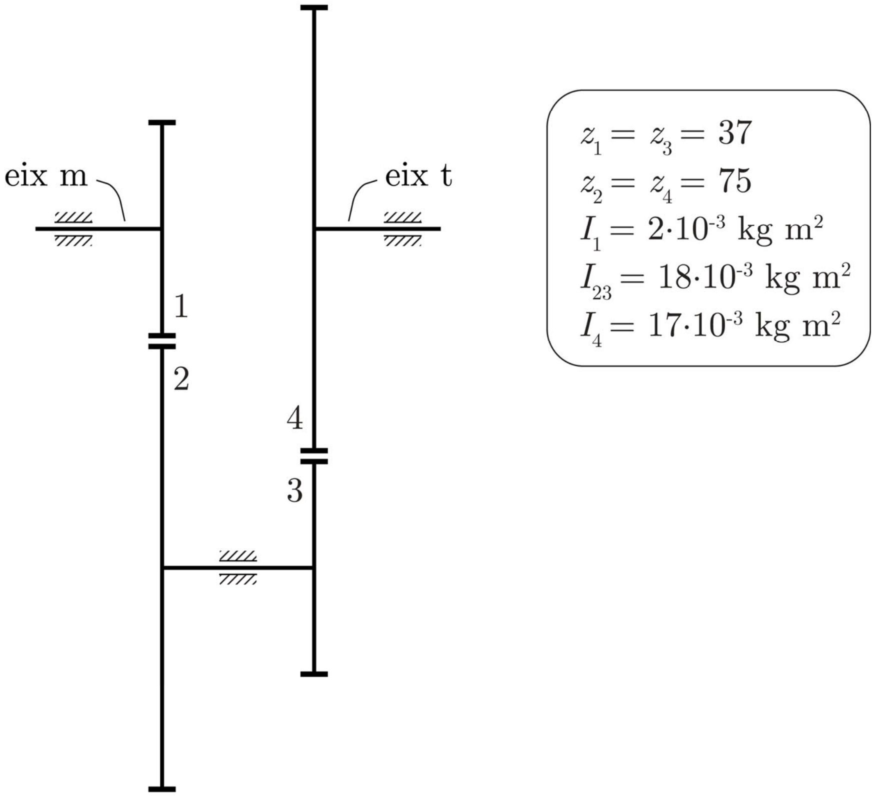


Figura (b)

L'esquema de la figura (a) correspon al d'una màquina industrial talladora de xapa. El reductor és de dues etapes i es correspon amb l'esquema de la figura (b).

Les característiques dels components de la màquina, no indicades a les figures, són:

Motor:

- Rendiment electromecànic $\eta_{\text{e-m}} = 0{,}8$

Reductor:

- Resistències passives reduïdes a l'eix m:

  $$T_{\text{rp}} = T_{\text{rp0}} + \left(a + b\, \mathrm{e}^{-\omega/\omega_0} \right) T_{\text{m}},$$

  on T_{m} és el parell que realitza el motor i

  $T_{\text{rp0}} = 1{,}5$ Nm, $a = 0{,}02$, $b = 0{,}06$, $\omega_0 = 10$ rad/s,

Talladora:

- Potència nominal $P_{\text{t}} = 2{,}2$ kW
- Velocitat nominal $n_{\text{t}} = 710$ min^{-1}

Determineu:

a) La relació de transmissió τ del reductor.

b) La inèrcia reduïda I_{red} del reductor a la rotació de l'eix t.

c) El parell motor mínim, $T_{\mathrm{m\ min}}$, que ha de proporcionar el motor per arrencar la talladora sense càrrega.

En condicions nominals i règim estacionari, la talladora rep una potència $P_{\mathrm{t}} = 2{,}2$ kW i el seu eix gira a $n_{\mathrm{t}} = 710$ min^{-1}. Determineu:

d) El parell motor, $T_{\mathrm{m\ nom}}$, i el rendiment η_{red} del reductor.

e) L'energia elèctrica, E_{elec}, consumida pel motor durant un temps $t = 6$ h de funcionament.

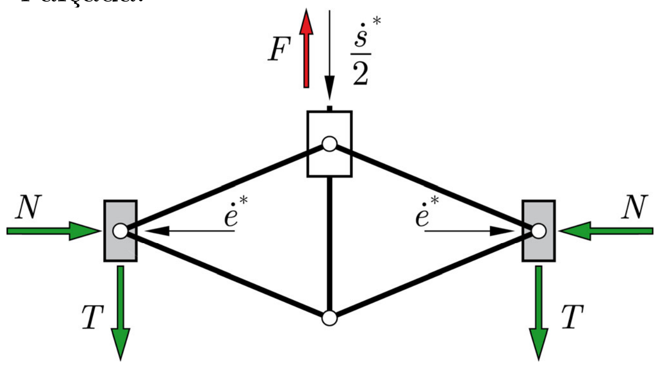
Solució Exercici 1

a) La relació entre les coordenades generalitzades s'obté per inspecció de la figura de l'enunciat:

$2\,l\sin\varphi - s = 0$

Per altra banda, també de la figura, s'obté: $l\cos\varphi - e = 0$ i $s = 2\sqrt{l^2 - e^2}$.

b) Per determinar el valor de la força normal que la sabata rep del tub es proposa emprar el mètode de les potències virtuals prenent com a sistema la grapa i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços, fent que la recta AC no canviï l'alçada.



$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \;\rightarrow\; -N\,\dot e^* - N\,\dot e^* - F\,\frac{\dot s^*}{2} = 0$$

La relació entre $\dot e^*$ i $\dot s^*$ es pot obtenir derivant les expressions de l'apartat anterior ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per a les dimensions donades:

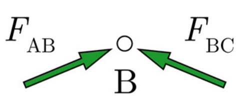
$$\dot e^* = -\dot\varphi^*\,l\sin\varphi \quad \text{i} \quad \dot s^* = \dot\varphi^*\,2\,l\cos\varphi \;\rightarrow\; N = \frac{F}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{F}{2\tan\varphi} = \frac{F}{2}\frac{e}{\sqrt{l^2 - e^2}} = 960 \text{ N.}$$

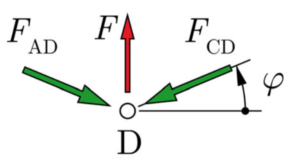
c) El coeficient de frec mínim entre les sabates i el tub que garanteix que no hi hagi lliscament és el que porta a la situació de lliscament imminent: $T = \mu_{\text{min}}\,N$.

Per la simetria del sistema $T = F/2$. Per tant:

$$\frac{F}{2} = \mu_{\text{min}} N \quad\rightarrow\quad \mu_{\text{min}} = \tan\varphi = \frac{\sqrt{l^2 - e^2}}{e} = 0{,}4167$$

d) En ser les barres de massa negligible i articulades en els seus extrems es pot assegurar que la força que realitzen té la direcció de la pròpia barra.





L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment a l'eix de l'articulació B porta a:

$$\sum_{\text{eix B}} F_{\text{ext}} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\text{AB}} = F_{\text{BC}} = 0$$

L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment a l'eix de l'articulació D porta a:

$$\sum_{\text{eix D}} F_{\text{ext}} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\text{AD}} = F_{\text{CD}}$$

$$F = 2F_{\text{AD}} \sin\varphi \qquad F_{\text{AD}} = F\frac{l}{s} = F\frac{l}{2\sqrt{l^2 - e^2}} = 1040 \text{ N.}$$

El signe positiu del valor de F_{AD} és indicatiu que les barres AD i CD estan sotmeses a compressió.

Solució Exercici 2

a) Les equacions geomètriques d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell OPQO.

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} -l_1 \sin\left(\alpha + \varphi_1\right) + l_2 \sin\varphi_2 + d = 0 \\ l_1 \cos\left(\alpha + \varphi_1\right) + l_2 \cos\varphi_2 - y = 0 \end{cases}$$

La matriu jacobiana és en aquest cas:

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -l_1 \cos\left(\alpha + \varphi_1\right) & l_2 \cos\varphi_2 & 0 \\ -l_1 \sin\left(\alpha + \varphi_1\right) & -l_2 \sin\varphi_2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Les velocitats $\dot{\varphi}_2$ i $\dot{y}$ es poden obtenir, per exemple, a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats.

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{\text{d}} = -\left(\mathbf{\Phi}_{\text{q}}^{\text{d}}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Phi}_{\text{q}}^{\text{i}}\,\dot{\boldsymbol{q}}^{\text{i}} + \mathbf{\Phi}_{\text{t}}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} l_2 \cos\varphi_2 & 0 \\ -l_2 \sin\varphi_2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -l_1 \cos\left(\alpha + \varphi_1\right) \\ -l_1 \sin\left(\alpha + \varphi_1\right) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \frac{l_1}{l_2} \frac{\cos\left(\alpha + \varphi_1\right)}{\cos\varphi_2} \quad \text{i} \quad \dot{y} = -l_1\,\dot{\varphi}_1 \frac{\sin\left(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\varphi_2}$$

c) El centre instantani de rotació de la biela PQ es pot determinar fàcilment ja que es coneix la direcció de les velocitats de dos dels seus punts. Per tant, el centre instantani es troba a la intersecció de la recta horitzontal que passa pel punt Q amb la prolongació de la recta OP.

d) Per determinar el parell T_{m} que s'ha d'aplicar al mànec per aixafar la llauna, es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema tot el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

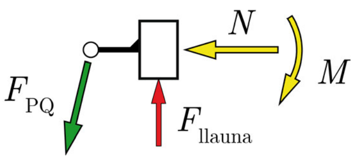
$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \;\rightarrow\; T\,\dot{\varphi}_1^{\,*} + F_{\text{llauna}}\,\dot{y}^{\,*} = 0$$

La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^{\,*}$ i $\dot{y}^{\,*}$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant, amb la relació trobada a l'apartat *b*) s'obté l'expressió del parell T.

$$T = F_{\text{llauna}}\, l_1 \frac{\sin\left(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\varphi_2}.$$

Per a la configuració demanada, $T = 32{,}67$ N·m.

e) En ser la biela PQ de massa i inèrcia negligibles es pot assegurar que la força F_{PQ} que fa té la direcció de la pròpia barra. Per determinar-la, es pot aplicar el teorema de la quantitat de moviment a la corredora. El diagrama de sòlid lliure d'aquest sòlid es mostra a la figura adjunta.



$$\sum_{\text{corredora}} F_{\text{ext}} = 0 \;\rightarrow\; F_{\text{llauna}} - F_{\text{PQ}}\cos\varphi_2 = 0$$

$$F_{\text{PQ}} = \frac{F_{\text{llauna}}}{\cos\varphi_2}$$

Alternativament, es pot aplicar el teorema del moment cinètic en el punt O del mànec OR.

$$\sum_{\text{OR}} M_{\text{ext}}(\text{O}) = 0 \quad\rightarrow\quad T - F_{\text{PQ}}\, l_1 \sin\left(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2\right) = 0 \rightarrow F_{\text{PQ}} = \frac{T}{l_1}\frac{1}{\sin\left(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2\right)}$$

En la configuració indicada, $F_{\text{PQ}} = 509{,}8$ N. El signe positiu del valor de F_{PQ} és indicatiu que la força s'ha dibuixat en el sentit correcte i per tant que la barra PQ està sotmesa a tracció.

Solució Exercici 3

a) El reductor correspon a un tren d'engranatges d'eixos fixos i per tant la seva relació de transmissió és:

$$\tau = \frac{\omega_{\text{t}}}{\omega_{\text{m}}} = (\pm)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = 0{,}2434.$$

Paral·lelament, es pot definir una relació de transmissió $\tau_2 = \dfrac{\omega_{\mathrm{t}}}{\omega_{23}} = \dfrac{z_3}{z_4} = 0,49\widehat{3}$.

b) La inèrcia reduïda I_{red} del reductor a la rotació de l'eix t s'obté del càlcul de l'energia cinètica del reductor:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} I_{23} \omega_{23}^2 + \frac{1}{2} I_4 \omega_{\mathrm{t}}^2 = \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{\omega_{\mathrm{t}}}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{23} \left(\frac{\omega_{\mathrm{t}}}{\tau_2}\right)^2 + \frac{1}{2} I_4 \omega_{\mathrm{t}}^2 \quad \rightarrow$$

$$I_{\mathrm{red}} = \frac{I_1}{\tau^2} + \frac{I_{23}}{\tau_2^2} + I_4 = 0{,}1247\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$$

c) El parell motor mínim que el motor ha de proporcionar per arrencar la talladora sense càrrega es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema reductor:

$$P_{\mathrm{sub}} = P_{\mathrm{cedida}} + P_{\mathrm{aculumada}} \ \rightarrow \ P_{\mathrm{mot}} = P_{\mathrm{rp}} + P_{\mathrm{útil}} + \dot{E}_{\mathrm{c}}$$

Si la talladora arrenca sense càrrega $P_{\mathrm{útil}}$ és nul·la; si el parell ha de ser el mínim possible l'acceleració serà negligible i per tant $\dot{E}_{\mathrm{c}} = 0$.

$$P_{\mathrm{m}} = P_{\mathrm{rp}}\left(\omega = 0\right) \ \rightarrow \ T_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{rp}}\left(\omega = 0\right) \ \rightarrow \ T_{\mathrm{m}} = \frac{T_{\mathrm{rp0}}}{1-(a+b)} = 1{,}63\ \mathrm{N{\cdot}m}$$

d) El parell que el motor ha de proporcionar en règim estacionari es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema reductor. En règim estacionari no s'acumula potència.

$$P_{\mathrm{sub}} = P_{\mathrm{cedida}} + P_{\mathrm{aculumada}} \ \rightarrow \ P_{\mathrm{mot}} = P_{\mathrm{rp}} + P_{\mathrm{t}}$$

$$T_{\mathrm{m}}\ \omega_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{rp}}\ \omega_{\mathrm{m}} + P_{\mathrm{t}}$$

$$T_{\mathrm{m}} = \frac{T_{\mathrm{rp0}} + \dfrac{P_{\mathrm{t}}}{\omega_{\mathrm{m}}}}{1-\left(a + b\ \mathrm{e}^{-\omega_{\mathrm{m}}/\omega_0}\right)} = 8{,}879\ \mathrm{N{\cdot}m}$$

El rendiment del reductor s'obté directament de la definició:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{t}}}{P_{\mathrm{mot}}} = \frac{P_{\mathrm{t}}}{T_{\mathrm{m}}\ \omega_{\mathrm{m}}} = \frac{P_{\mathrm{t}}}{T_{\mathrm{m}}\ \dfrac{\omega_{\mathrm{t}}}{\tau}} = 0{,}8111$$

e) L'energia elèctrica E_{elec} en $t = 6$ h de funcionament s'obté a partir de la potència elèctrica P_{elec}.

$$E_{\mathrm{elec}} = P_{\mathrm{elec}}\ t = \frac{P_{\mathrm{mot}}}{\eta_{\mathrm{em}}}\ t = \frac{T_{\mathrm{m}}\ \omega_{\mathrm{m}}}{\eta_{\mathrm{em}}}\ t = 20{,}34\ \mathrm{kW{\cdot}h}$$