



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Eines de disseny de lleis de moviment

Corbes de Bézier i corbes B-spline, no paramètriques

Joaquim M. Veciana

Salvador Cardona

2006



Departament d'Enginyeria Mecànica

Eines de disseny de lleis de moviment
Corbes de Bézier i corbes B-spline, no paramètriques

Primera edició març 2006

© Els autors, 2006

Edita: Salvador Cardona Foix

I.S.B.N.: 84-689-7877-9

Dipòsit Legal: B-20705-2006

Són rigurosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Eines de disseny de lleis de moviment. Corbes de Bézier i corbes B-spline, no paramètriques

En nombroses aplicacions mecàniques sovint es desitja que un determinat sòlid es desplaci seguint una llei de moviment més o menys complexa. Són un exemple típic, les vàlvules d'admissió i escapament de motors de combustió interna (amb mecanismes lleva-palpador), l'arrencada i parada d'automòbils, de carros porta eines en màquines de control numèric, de braços de robot, d'ascensors o d'elevadors, de moviments angulars de rotors de motors, etc.

Prenent com a exemple un mecanisme lleva-palpador com els de la Figura 1, aquesta llei de moviment es defineix, en aquest cas, per mitjà de la relació entre el desplaçament del palpador i l'angle girat per la lleva segons

$$d(\theta) = d_0 + S(\theta) \quad (1)$$

essent d_0 el radi de base de la lleva.

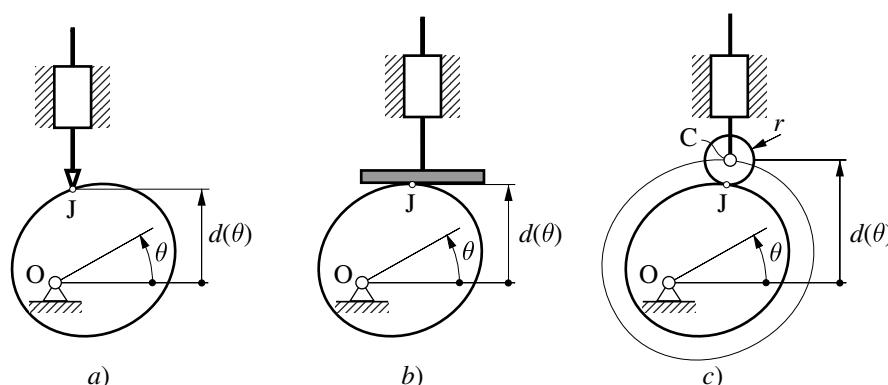


Figura 1 Mecanismes lleva-palpador a) puntual, b) pla, c) de corró

Altres lleis de moviment que representen comportaments físics de sòlids, poden estar expressades com una relació entre una coordenada x , o alguna de les seves derivades, i el temps segons $x = f_1(t)$ o $\dot{x} = f_2(t)$ o $\ddot{x} = f_3(t)$.

L'obtenció de lleis de moviment per mitjà de la concatenació de polinomis algebraics ha estat àmpliament utilitzada. De manera clàssica, s'ha fet servir una base canònica de monomis per obtenir aquestes funcions. Tot i això, actualment existeixen mètodes que tenen el seu origen en els algorismes que fan servir els ordinadors en programes de disseny que responen a les sigles *CAGD* (Computer Aided Geometric Design).



1 Base canònica de monomis

Els polinomis algebraics expressats en base canònica han tingut una àmplia utilització per aproximar per trams una llei de moviment, ja que són polinomis fàcils de derivar, integrar i avaluar. Cada un d'aquests trams j es pot expressar de forma paramètrica com

$$b_j(u) = a_{0j} + a_{1j}u + a_{2j}u^2 + \dots + a_{nj}u^n \quad (2)$$

Per a la obtenció d'aquestes funcions, clàssicament es fa servir una base canònica de monomis que, per a grau n , serien $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$. Tot i això, la utilització de la base canònica presenta els següents desavantatges:

- Els coeficients dels polinomis a_{ij} no tenen significat geomètric directe, és a dir, no es pot predir de manera intuïtiva quin efecte tindrà un canvi d'aquests sobre la forma de la corba.
- Les unions entre varis trams de la corba de la corba resulten laborioses en el seu càlcul, en haver d'incloure en les equacions del sistema, les condicions que fixen el grau de continuïtat C^r de la unió.
- Per a valors de polinomis algebraics de grau n elevat, la base monomial canònica no és estable numèricament.
- Els polinomis algebraics obtinguts amb gran quantitat de punts de pas, poden presentar formes no desitjades entre punts.

Per facilitar la síntesi de lleis de moviment representades per trams consecutius de polinomis algebraics, s'utilitzen actualment les corbes de Bézier i les corbes B-spline, ambdues provinents de les eines de representació que fan servir els programes de disseny assistit per ordinador. Les corbes B-spline resolen tots els desavantatges plantejats. Les corbes de Bézier, tot i no resoldre'ls en la seva totalitat, poden ser utilitzades còmodament en molts casos i faciliten la comprensió de l'esquema B-spline, ja que es poden presentar com un cas particular d'aquest.

D'altra banda, tant les corbes de Bézier com les corbes B-spline presenten l'avantatge de poder ser obtingudes a través d'algoritmes molt aptes per al càlcul numèric, algoritmes de *de Casteljau* i de *de Boor* respectivament.

2 Corbes de Bézier

Les corbes de Bézier –funcions polinòmiques definides sobre la base de polinomis de Bernstein– reben el seu nom per P.E. Bézier i es van començar a emprar en el disseny de carrosseries, per Renault, a principis dels anys 60. Paral·lelament P. de Casteljau (de Citroën) va desenvolupar la mateixa teoria amb el mateix fi. Els treballs d'aquest darrer no es van arribar a publicar i per això les corbes en base de Bernstein porten el nom de Bézier.

En aquest apartat, s'exposen els mètodes per definir corbes B-spline no paramètriques i no racionals extrets principalment dels textos de Farin (1997) i Cardona i Clos(2000).



Funcions base. Polinomis de Bernstein

Sobre un domini unitari, els polinomis de Bernstein de grau n constitueixen una base de l'espai vectorial de polinomis de grau n i tenen la següent expressió:

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{on} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3)$$

A la Figura 2 es mostren els polinomis de Bernstein de graus 1, 2, i 3 així com també els monomis fins a grau 3.

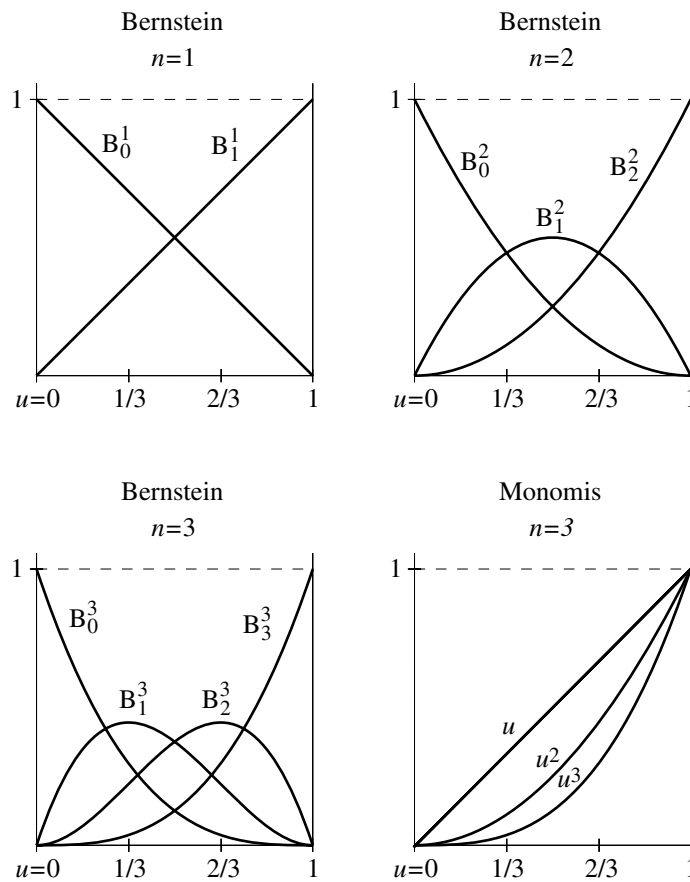


Figura 2 Polinomis de Bernstein de graus $n=1, 2$ i 3 i monomis fins a grau 3

Les principals propietats dels polinomis de Bernstein es poden resumir en:

- Satisfan la fórmula recursiva:

$$B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad i = 0, \dots, n \quad (4)$$

$$B_0^0 = 1; \quad B_{-1}^n(u) = 0$$



- Són una partició de la unitat:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad (5)$$

- Són positius:

$$B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0,1] \quad (6)$$

- Tenen comportament simètric respecte als dos extrems de l'interval de definició

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u) \quad (7)$$

- A cada extrem només hi ha un polinomi de valor no nul.
- Presenten un màxim per a l'abscissa i/n .
- Constitueixen una base numèricament estable.

Corbes de Bézier no paramètriques i no racionals

Les corbes de Bézier $b(u)$ poden ser paramètriques o no paramètriques, amb $u \in [0,1]$. En el primer cas, u és el paràmetre i , per exemple, poden representar corbes en 3D essent $\mathbf{b}(u)$ un vector de tres components. Si no són paramètriques, el paràmetre u representa la variable de l'eix d'abscisses del gràfic de la corba $b(u)$.

Les corbes de Bézier també es poden classificar en no racionals –l'expressió que les defineix és un polinomi algebraic– o racionals –si l'expressió que les defineix és el quocient entre dos polinomis algebraics.

Per a l'aplicació considerada, es presenten únicament les corbes de Bézier no paramètriques i no racionals, ja que les corbes racionals no aporten cap avantatge significatiu respecte a les no racionals i, en canvi, augmenten considerablement la seva complexitat de càlcul. A partir d'aquí, com que totes les corbes de Bézier esmentades en l'apartat seran no paramètriques i no racionals, en general s'obvien el termes.

Una corba de Bézier $b(u)$ s'obté en la base de polinomis de Bernstein com:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0,1] \quad (8)$$

on els $n+1$ coeficients b_i s'anomenen *ordenades de Bézier*. El gràfic de la funció $b(u)$ s'anomena *corba de Bézier no paramètrica*. Per a cada ordenada b_i es defineix un punt \mathbf{b}_i de coordenades $(i/n, b_i)$ anomenat *punt de control* i el conjunt de punts de control formen l'anomenat *polígon de control*.

A l'expressió (8) el polinomi $B_i^n(u)$ es pot interpretar com la influència de b_i sobre la corba $b(u)$. Aquesta influència és màxima a $u=i/n$, ja que $B_i^n(u)$ hi presenta un màxim. Això fa que la representació gràfica de la corba $b(u)$ tendeixi a ser propera al polígon de



control (Figura 3), i si es desplaça verticalment un punt de control –es modifica la ordenada b_i corresponent– la corba presenta la modificació més acusada a l'entorn d'aquest punt.

Aquesta propietat i les següents donen un significat geomètric a les ordenades de Bézier que facilita el disseny i la modificació interactiva d'una corba de Bézier:

- La corba passa pels punts extrems b_0 , b_n i és tangent al polígon de control en aquests punts.
- La corba es troba tancada dins el domini convex dels punts de control (Figura 4). El polígon de control permet establir una caixa contenidora dins la qual es pot assegurar que es troba la corba.
- Precisió lineal. Si tots els punts de control estan sobre una recta, la corba de Bézier és precisament aquesta recta.
- Disminució de variacions. Segons aquesta propietat, el nombre d'interseccions de la corba amb una recta és menor o igual que el nombre d'interseccions de la recta amb el polígon de control.
- Invariància en front de transformacions afins. Això permet girar, traslladar o escalar la corba aplicant transformacions només al polígon de control.

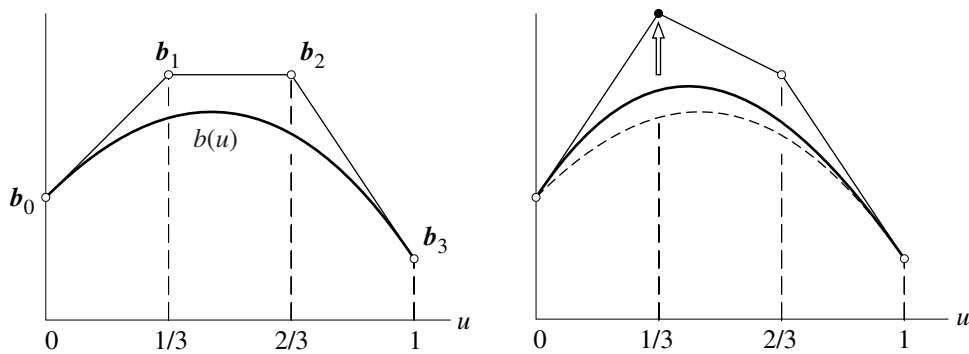


Figura 3 Corba de Bézier no paramètrica de grau $n=3$. Influència del punt b_1

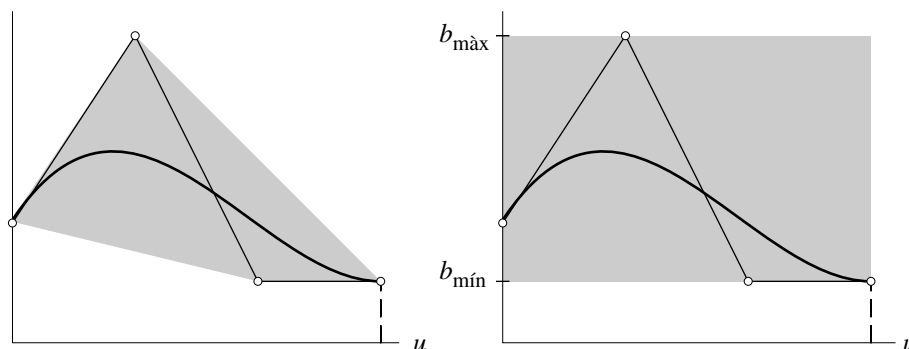


Figura 4 Domini convex i caixa contenidora d'una corba de grau $n = 3$

A més, resulta interessant observar els casos particulars següents (Figura 5):

- $n = 1$: segment rectilini d'extremes b_0, b_1 .
- $n = 2$: segment parabòlic d'extremes b_0 i b_2 , amb tangents en aquests punts que es tallen a b_1 .

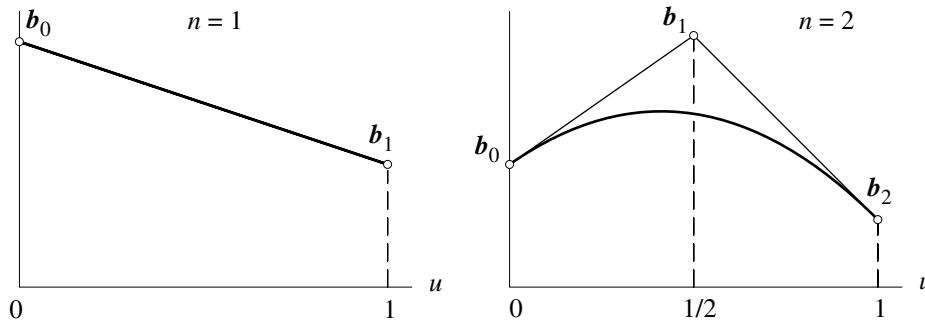


Figura 5 Corbes de Bézier no paramètriques de graus $n = 1, 2$

Algoritme de de Casteljau

Per trobar el valor d'un punt qualsevol de la corba de Bézier $b(u)$ es pot fer servir alternativament a l'expressió (8) l'algoritme de *de Casteljau*.

A partir dels punts de control b_i de coordenades $(i/n, b_i)$, el punt sobre la corba es calcula a partir de l'expressió recursiva següent:

$$b_i^k(u) = (1-u)b_i^{k-1}(u) + ub_{i+1}^{k-1}(u) \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-k \end{matrix} \quad (9)$$

Per a la iteració $k=0$ s'assigna el valor de la ordenada b_i , és a dir $b_i^0 = b_i$. El valor de la corba de Bézier en l'abscissa u és, finalment, $b(u) = b_0^n(u)$.

Aquest algoritme presenta l'avantatge principal respecte als polinomis de Bernstein de ser molt apte per a l'obtenció de corbes de Bézier per mitjà del càlcul numèric.

Derivació i integració d'una corba de Bézier no paramètrica

La derivada $b'(u)$ respecte a l'argument u d'un polinomi $b(u)$ de grau n és un polinomi de grau $n - 1$

$$b'(u) = \frac{db(u)}{du} \quad (10)$$

A la base de Bernstein, es pot comprovar que els coeficients b'_i de la derivada s'obtenen com



$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11)$$

i la corba $b'(u)$ s'expressa com

$$b'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} b'_i B_i^{n-1}(u) \quad u \in [0,1] \quad (12)$$

A la Figura 6 es presenta com exemple la derivada d'una corba cúbica ($n = 3$), que és una corba parabòlica. Aquesta última s'ha representat amb una escala reduïda 3 vegades per a l'eix d'ordenades.

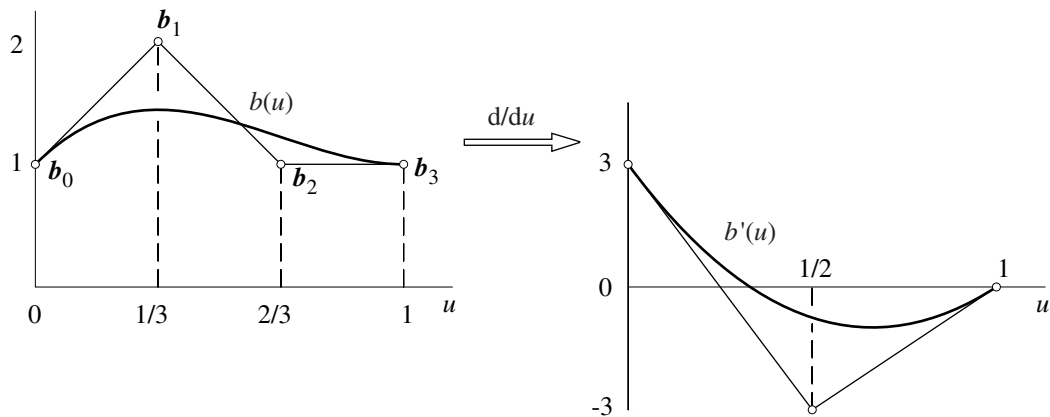


Figura 6 Derivada d'una corba de Bézier no paramètrica de grau $n = 3$

De l'expressió (11) es dedueix que, en el procés d'integració,

$$b_{i+1} = b_i + \frac{b'_i}{n+1} \quad (13)$$

essent b_i les ordenades de Bézier de la funció de partida, n l'ordre d'aquesta i b'_i les ordenades de la funció integrada. Per fixar els valors de b'_i cal imposar una condició a la funció integrada; el més usual és el valor inicial, que en aquest cas és igual a b_0 .

La utilització de les corbes de Bézier per tal de definir una funció $b(s)$ de la variable independent s entre s_0 i s_1 , $s \in [s_0, s_1]$, i el fet que les corbes de Bézier $b(u)$ es defineixen en un domini unitari, $u \in [0,1]$, fa que usualment s'utilitzi el canvi de variable lineal

$$u = \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \quad (14)$$

Amb aquest canvi de variables, la relació entre la derivada $b'(u(s))$ respecte a $u(s)$ i la derivada $b'(s)$ respecte a s és

$$b'(s) = b'(u(s)) u'(s) = \frac{b'(u(s))}{s_1 - s_0} \quad (15)$$



Condicions de continuïtat

L'expressió (11) posa de manifest que les derivades r -èsimes en els extrems $u = 0$, $u = 1$ només depenen dels $r+1$ punts de control més propers, és a dir, a $u = 0$ només depenen dels coeficients $b_0 \dots b_r$, i a $u = 1$ dels coeficients $b_{n-r} \dots b_n$.

La imposició de condicions de continuïtat r -èsima C^r en la unió entre dues corbes resulta, doncs, molt més senzilla en la base de Bernstein que en la base de monomis, ja que només es veuen involucrats $r+1$ coeficients de cada corba.

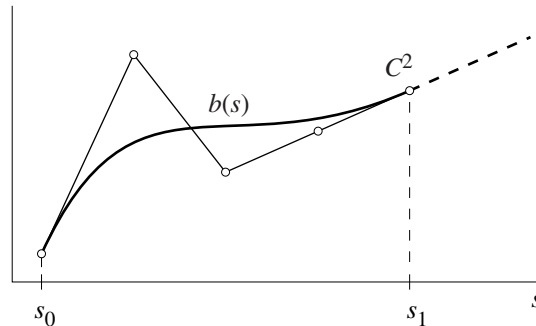


Figura 7 Unió C^2 d'una recta amb una corba de Bézier

En el cas particular d'unió d'una corba de Bézier amb un tram recte, per aconseguir continuïtat C^r respecte al paràmetre s , n'hi ha prou que els $r+1$ punts de control més propers a la unió es trobin sobre la prolongació del tram recte (Figura 7).

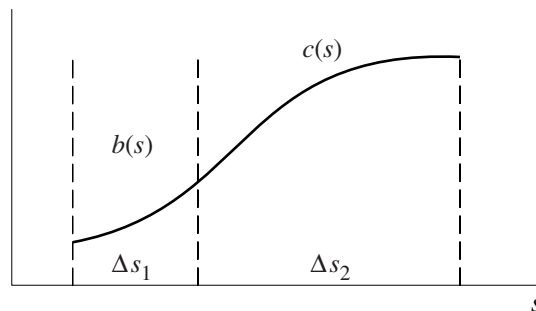


Figura 8 Unió de dos trams de corbes de Bézier

En el cas més general, es planteja determinar la corba de Bézier que s'uneix amb continuïtat C^r amb una altra corba coneguda (Figura 8). Si la corba coneguda és de Bézier $b(s)$, d'ordre n_1 i interval de definició Δs_1 — les derivades respecte a s en el punt d'unió es poden trobar de manera recurrent utilitzant les expressions (11) i (15) i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts de control extrems. Per exemple, si la unió es fa amb l'últim punt de la corba coneguda:



$$\begin{array}{ll}
b_{n_1} & b(s_{1\text{màx}}) = b_{n_1} \\
b'_{n_1-1} = (b_{n_1} - b_{n_1-1})n_1 & b'(s)|_{s_{1\text{màx}}} = b'(u)|_{u=1} \frac{1}{\Delta s_1} = b'_{n_1-1} \frac{1}{\Delta s_1} \\
b''_{n_1-2} = (b'_{n_1-1} - b'_{n_1-2})(n_1 - 1) & b''(s)|_{s_{1\text{màx}}} = b''_{n_1-2} \frac{1}{(\Delta s_1)^2} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Conegudes aquestes derivades, les ordenades de Bézier c_i de la corba de Bézier $-c(s)$, ordre n_2 i interval de definició Δs_2 que empalma amb continuïtat C^r amb la primera es poden trobar a partir de les expressions (11) i (15) i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts extrems

$$\begin{array}{l}
c_0 = b_{n_1}, \quad c_1 = c_0 + \frac{c'_0}{n_2}, \quad c_2 = c_1 + \frac{c'_1}{n_2}, \quad \dots \\
c'_0 = c'(u)|_{u=0} = c'(s)|_{s_{2\text{mín}}} \Delta s_2 = b'(s)|_{s_{1\text{màx}}} \Delta s_2 = b'_{n_1-1} \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}; \quad c'_1 = c'_0 + \frac{c''_0}{n_2 - 1}, \quad \dots \\
c''_0 = b''(s)|_{s_{1\text{màx}}} (\Delta s_2)^2 = b''_{n_1-2} \left(\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \right)^2, \quad \dots \\
\vdots
\end{array}$$

Com a casos particulars en unir dues corbes de Bézier:

- Si es vol continuïtat C^1 només cal que els dos últims punts de control del primer tram estiguin alineats amb els dos primers del segon tram –les corbes de Bézier en els extrems són tangents al polígon de control.
- Si les dues corbes de Bézier són del mateix ordre i estan definides en el mateix interval ($n=n_1=n_2$ i $\Delta s_1=\Delta s_2$) i tenen continuïtat C^r , les ordenades de Bézier respectives guarden la relació:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & & \\ 8 & -12 & 6 & -1 & 0 & \dots & \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ b_{n-4} \\ \vdots \\ b_{n-r} \end{Bmatrix}$$



Avantatges i limitacions de les corbes de Bézier no paramètriques

La definició d'una llei de moviment per mitjà de corbes de Bézier no paramètriques i no racionals té l'avantatge que la seva geometria es pot controlar de manera molt intuïtiva a través del polígon de control. Tot i això, es presenten a continuació unes certes limitacions que justifiquen en alguns casos la necessitat d'emprar corbes amb més flexibilitat de disseny com les B-spline:

- La continuïtat C^r en la unió entre dos trams consecutius no queda automàticament garantida.
- El grau de la corba depèn del nombre de punts del polígon de control. Si la corba té una forma molt complexa, el seu grau ha de ser elevat, i això pot provocar inestabilitat en el càlcul numèric.
- Falta de control local de la corba: el desplaçament d'un punt de control afecta tota la corba.
- La posició de les abscisses dels punts de control és equidistant i no es pot modificar.

Exemple de disseny de llei de velocitats

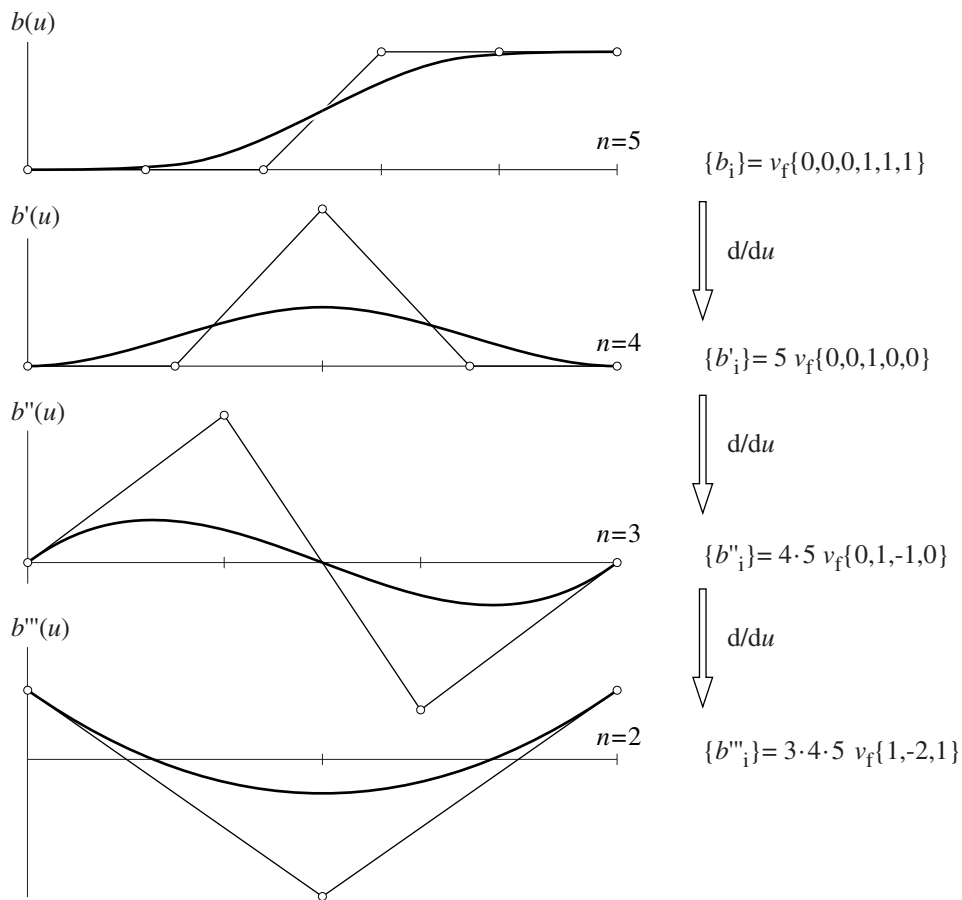


Figura 9 Llei de velocitat d'engedada d'un carro porta-eines i derivades successives



En l'exemple de la Figura 9 es mostra la definició de la llei de velocitats $b(u)$ d'engedada d'un carro porta-eines d'una màquina de control numèric, que ha de passar de velocitat nul·la a velocitat constant v_f i per a la qual es desitja que la continuïtat en l'acceleració sigui C^1 . Es mostren també les successives derivades d'aquesta llei. Les escales de les diferents gràfiques s'han adequat per a la seva correcta visualització.

Per garantir la continuïtat de C^1 en l'acceleració, és necessària una continuïtat C^2 en velocitat, és a dir, el polígon de control ha de tenir 3 punts sobre les rectes de velocitat nul·la i velocitat constant v_f . Per tant, el grau mínim del polinomi que defineix la llei de velocitat és $n=5$.

3 Corbes B-spline

El terme *spline* prové de certs llistons flexibles, de fusta o metall, que utilitzaven els dissenyadors de vaixells o avions, per definir la forma del casc o fuselatge. Per obtenir la forma desitjada s'unien alguns d'aquests llistons i se'ls obligava a seguir una corba mitjançant pesos o estaques. El llistó restava lliure entre aquestes restriccions.

Una corba *spline* és aquella corba contínua que està formada per diversos trams polinòmics. Usualment les corbes *spline* estan representades analíticament en forma de funcions polinòmiques anomenades *B-spline* i, llavors, les corbes s'anomenen *corbes B-spline*.

En aquest apartat s'exposen els mètodes per definir corbes B-spline no paramètriques i no racionals extrets principalment dels textos de Farin (1997) i Reyes (2000).

Una corba B-spline de grau n és la unió de L trams polinòmics de grau n , on cada un és la imatge d'un interval $[u_i, u_{i+1}]$ del domini $[u_{n-1}, \dots, u_{L+n-1}]$, i on u és el paràmetre de la corba. Els nombres reals u_i s'anomenen *nodes*. Els nodes formen una seqüència creixent $\mathbf{u} = \{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$ anomenada *vector* o *seqüència de nodes*.

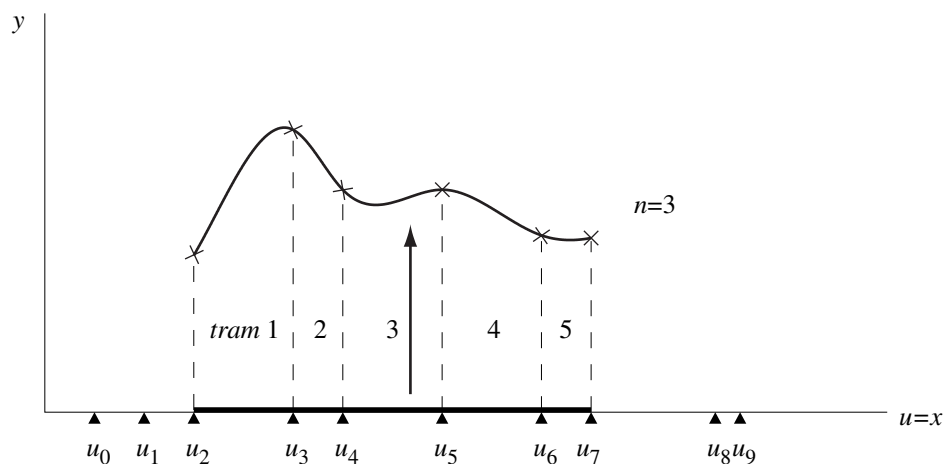


Figura 10 Domini de definició i trams d'una corba B-spline de grau $n=3$

En la Figura 10 es mostra l'exemple d'una corba B-spline on el paràmetre u coincideix amb la coordenada de l'eix d'abscisses x (corba no paramètrica), de grau $n=3$ i nodes $\mathbf{u}=\{1,2,3,5,6,8,10,11,13\frac{1}{2}, 14\}$. En aquest cas, la corba queda definida en el domini $[u_2, \dots, u_7]$ i els trams que conformen la corba són $L=5$.

Corbes B-spline no paramètriques i no racionals

A l'igual que en les corbes de Bézier, les corbes B-spline poden ser paramètriques o no paramètriques i racionals o no racionals. Per a la síntesi de lleis de moviment, es proposa la utilització de les corbes B-spline no paramètriques i no racionals, donat que, dintre de la família de corbes B-spline, cobreixen perfectament tots els requeriments de flexibilitat i facilitat de disseny i, d'altra banda, són les que requereixen menor complexitat de càlcul. A l'igual que en l'apartat de corbes de Bézier, totes les corbes esmentades en l'apartat seran no paramètriques i no racionals i, per tant en general, s'obvia el terme.

Una corba B-spline no paramètrica està associada a un *polígon de control* que té $L+n$ punts d_i anomenats *punts de control*. Les coordenades (ζ_i, d_i) dels punts de control tenen ordenades d_i de lliure elecció i abscisses anomenades *abscisses de Greville* ζ_i determinades per la seqüència de nodes:

$$\zeta_i = \frac{1}{n}(u_i + \dots + u_{i+n-1}) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (16)$$

En la Figura 11 es mostren les abscisses de Greville i el polígon de control pel cas de la corba de l'exemple anterior. Les abscisses de Greville, que determinen la posició dels punts de control sobre l'eix x , han estat calculades a partir del vector de nodes \mathbf{u} , essent les ordenades d_i de lliure elecció.

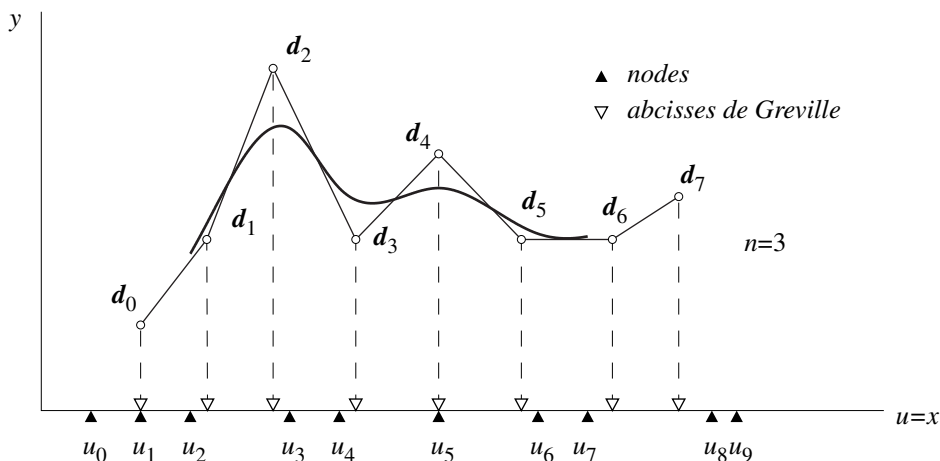


Figura 11 Abscisses de Greville i polígon de control d'una corba B-spline de grau $n=3$

En la definició de lleis de moviment, acostuma a ser interessant que la corba que es dissenya es vulgui fer passar pels punts de control inicial i final, o d'altres punts intermedis del polígon de control. En l'esquema B-spline, es controla aquesta propietat



introduint nodes de valor repetit en el vector de nodes. Si un node es repeteix r vegades es diu que té *multiplicitat* r . Els *nodes simples* són aquells que la seva multiplicitat r és la unitat. Si un node té multiplicitat $r=n$, llavors la corba passa pel node.

En la Figura 12 es mostra el control dels punts de pas extrems pel cas de la corba de l'exemple anterior. S'han fet coincidir els tres primers nodes i els tres darrers per obtenir multiplicitats $r=n=3$ i així fer passar la corba pels extrems del polígon de control.

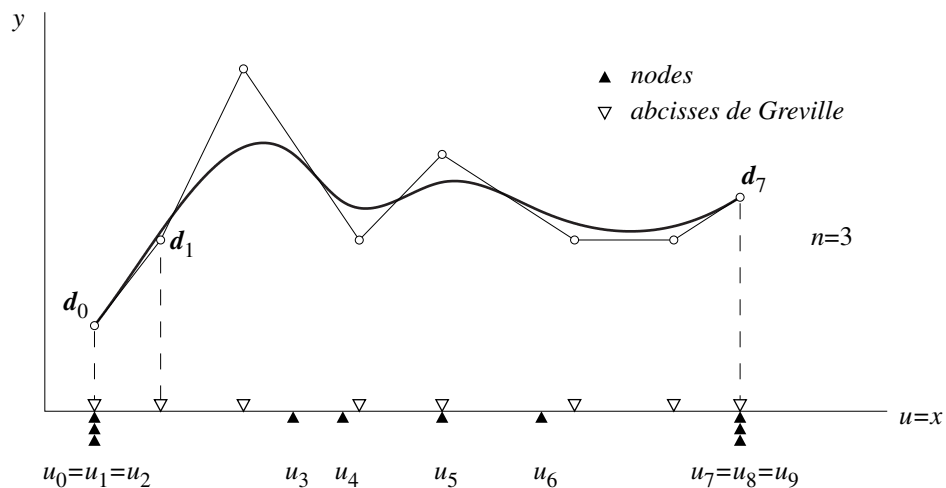


Figura 12 Control dels punts de pas extrems en una Corba B-spline de grau $n=3$

Quan algun dels nodes intermedis (u_n, \dots, u_{n+L-2}) pren multiplicitat r diferent de la unitat, genera $r-1$ trams de longitud nul·la. Per tant, el nombre de trams polinòmics no nuls que formen la corba serà el valor de L disminuït en una unitat per cada increment de multiplicitat d'aquests nodes.

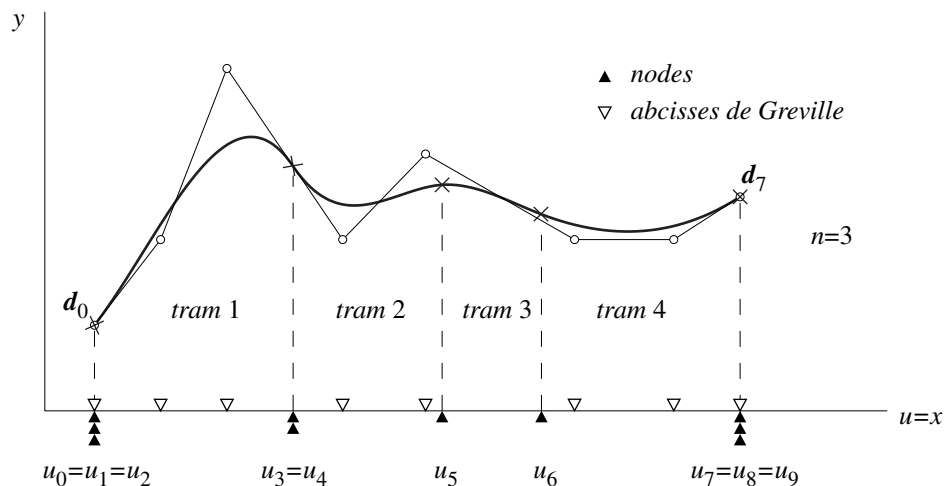


Figura 13 Increment de multiplicitat dels nodes intermedis i trams resultants

En la Figura 13 es mostra la corba de l'exemple anterior on s'han fet coincidir els nodes u_3 i u_4 . En aquest cas $L=5$ (mateix nombre total de nodes) però ara la corba està



formada per 4 trams polinòmics no nuls, ja que existeix un node intermedi amb multiplicitat 2.

Funcions Base B-spline

Una corba B-spline no paramètrica es pot expressar segons:

$$y(u) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i N_i^n(u) \quad (17)$$

on d_i són les ordenades dels punts de control i $N_i^n(u)$ són les funcions base. En la Figura 14 es mostren les funcions base per a la corba B-spline del darrer exemple. Aquestes funcions base es defineixen de forma recursiva com

$$N_i^n(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (18)$$

amb

$$\begin{cases} N_i^0(u) = 1 & u_{i-1} \leq u < u_i & i = 0, \dots, L+2n-2 \\ N_i^0(u) = 0 & u < u_{i-1}, \quad u \geq u_i \\ N_{L+2n-1}^0(u) = 0 \\ u_{-1} = u_0 \\ u_{L+2n-1} = u_{L+2n-2} \end{cases}$$

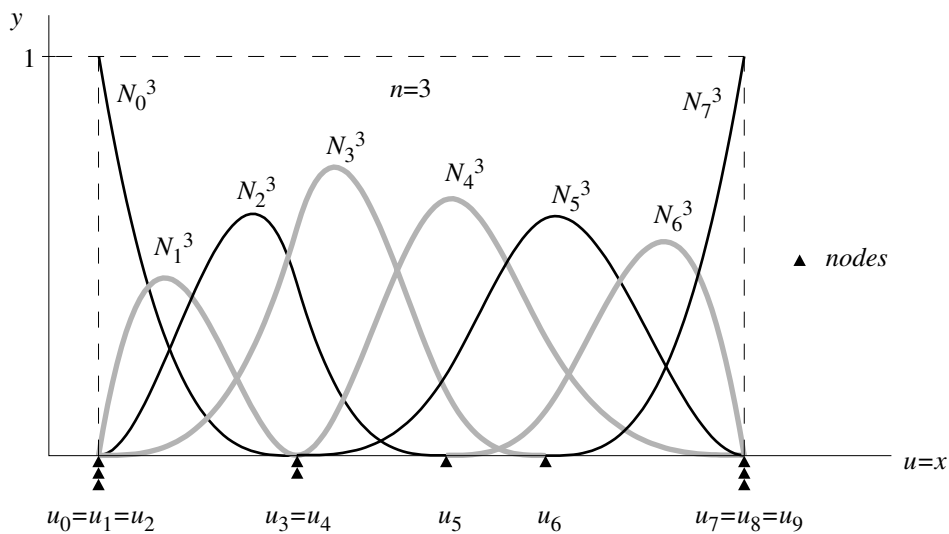


Figura 14 Funciones base B-spline de grau $n=3$ pel vector de nodes indicat



Les funcions base de l'expressió (18) constitueixen una base de l'espai de les funcions polinòmiques definides a trossos –corbes B-spline– de grau n sobre el vector de nodes \mathbf{u} .

Les principals propietats d'aquestes funcions base són:

- Cada funció $N_i^n(u)$ està definida segons:

$$\begin{aligned} N_i^n(u) &> 0 && u_{i-1} \leq u < u_{i+n} \\ N_i^n(u) &= 0 && u < u_{i-1}, \quad u \geq u_{i+n} \end{aligned} \quad (19)$$

- Són una partició de la unitat:

$$\sum_{i=0}^{L+n-1} N_i^n(u) = 1 \quad (20)$$

- Són positives en el seu interval de definició.
- Constitueixen una base numèricament estable.

Les corbes B-spline gaudeixen de les següents propietats comuns amb les corbes de Bézier:

- La corba passa pels punts extrems de control i és tangent al polígon de control en ells quan la multiplicitat dels nodes extrems r coincideix amb el grau del polinomi n .
- La corba es troba tancada dins el domini convex dels punts de control.
- Precisió lineal.
- Disminució de variacions.
- Invariància en front de transformacions afins.

Algoritme de de Boor

Per trobar el valor d'un punt qualsevol sobre la corba B-spline $y(u)$, es pot fer servir, alternativament a l'expressió (17), l'algoritme de *de Boor*. La corba s'avalua per a un valor del paràmetre u que està en l'interval I dintre dels L intervals del domini de la corba, $u \in [u_I, u_{I+1}) \subset [u_{n-1}, u_{L+n-1}]$. El procés es resol en diverses iteracions $k=1, \dots, n-r$, on si u coincideix amb un node intern, r indica la multiplicitat del node, i si u no coincideix amb un node intern, r val zero.

Partint dels punts de control \mathbf{d}_i de coordenades (ξ_i, d_i) , el punt sobre la corba es calcula a partir de l'expressió recursiva següent:

$$\begin{aligned} d_i^k(u) &= \frac{u_{i+n-k} - u}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_{i-1}^{k-1}(u) + \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_i^{k-1}(u) && k = 1, \dots, n-r \\ &&& i = I - n + k + 1, \dots, I - r + 1 \end{aligned} \quad (21)$$



Per a la iteració $k=0$ s'assigna el valor de la ordenada d_i , és a dir $d_i^0=d_i$. El valor de la corba B-spline en l'abscissa u és

$$y(u) = d_{I-r+1}^{n-r}(u) \quad (22)$$

Aquest algoritme, al igual que l'algoritme de *de Casteljau* per a les corbes de Bézier, presenta l'avantatge principal respecte a les funcions base B-spline de ser molt apte per a l'obtenció de corbes B-spline per mitjà del càlcul numèric.

Derivació i integració d'una corba B-spline no paramètrica

La derivada d'una corba B-spline no paramètrica és una altra corba B-spline no paramètrica. La derivació d'una corba B-spline es pot obtenir a partir del vector de nodes $\mathbf{u}=\{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$, del grau n , i de les ordenades dels punts de control d_i de la corba de partida. L'obtenció del vector de nodes \mathbf{u}' , i de les coordenades dels punts de control (ξ'_i, d'_i) de la corba derivada es fa segons les següents expressions,

$$\mathbf{u}' = \{u'_0, u'_1, \dots, u'_{L+2n-4}\} \quad (23)$$

on

$$u'_i = u_{i+1} \quad i = 0, \dots, L+2n-4 \quad (24)$$

$$\xi'_i = \frac{1}{n-1}(u_{i+1} + \dots + u_{i+n-1}) \quad i = 0, \dots, L+n-2 \quad (25)$$

$$d'_i = n \frac{d_{i+1} - d_i}{u_{n+i} - u_i} \quad i = 0, \dots, L+n-2 \quad (26)$$

Cal notar que el polígon de control de la corba derivada té un punt menys que el de la corba de partida i que el vector de nodes té dos punts menys que els de la corba de partida.

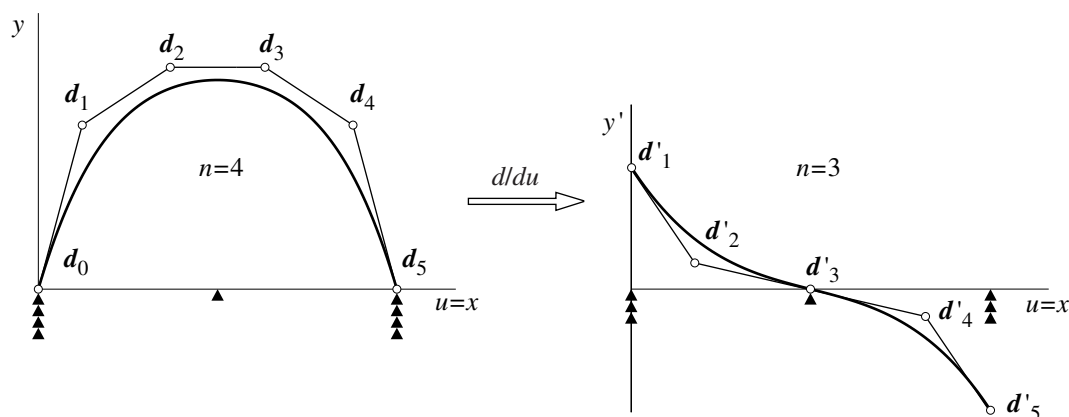


Figura 15 Derivada d'una corba B-spline no paramètrica de grau $n=4$



En la Figura 15 es mostra gràficament el procés de derivació. El grau del polinomi que defineix la corba disminueix en una unitat i el primer i darrer nodes queden eliminats. La corba de l'exemple, amb grau $n=4$ i vector de nodes $\mathbf{u}=\{0,0,0,0,1/2,1,1,1,1\}$ passa a tenir grau 3 i vector de nodes $\mathbf{u}=\{0,0,0,1/2,1,1,1\}$.

En les corbes que passen pels punts de control extrems, és a dir, en les que els nodes extrems tenen multiplicitat $r=n$, a partir de les expressions (25) i (26) es dedueix el procés d'integració. Si de la corba de partida es coneix el vector de nodes $\mathbf{u}=\{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$, el grau n , i les ordenades dels punts de control d_i , el vector de nodes de la corba integrada \mathbf{u} , i les coordenades del polígon de control (ξ_i, d_i) són

$$\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots, u_{L+2n}\} \quad (27)$$

on

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-1} & i = 1, \dots, L+2n-1 \\ u_0 &= u_0 \\ u_{L+2n} &= u_{L+2n-2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\xi_i = \frac{1}{n+1} (u_i + \dots + u_{i+n}) \quad i = 0, \dots, L+n \quad (29)$$

$$d_{i+1} = d_i + \frac{d_i}{n+1} (u_{n+i+1} - u_i) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (30)$$

Per fixar els valors de d_i cal imposar una condició a la funció integrada; el més usual és el valor inicial, que en aquest cas és igual a d_0 .

Condicions de continuïtat

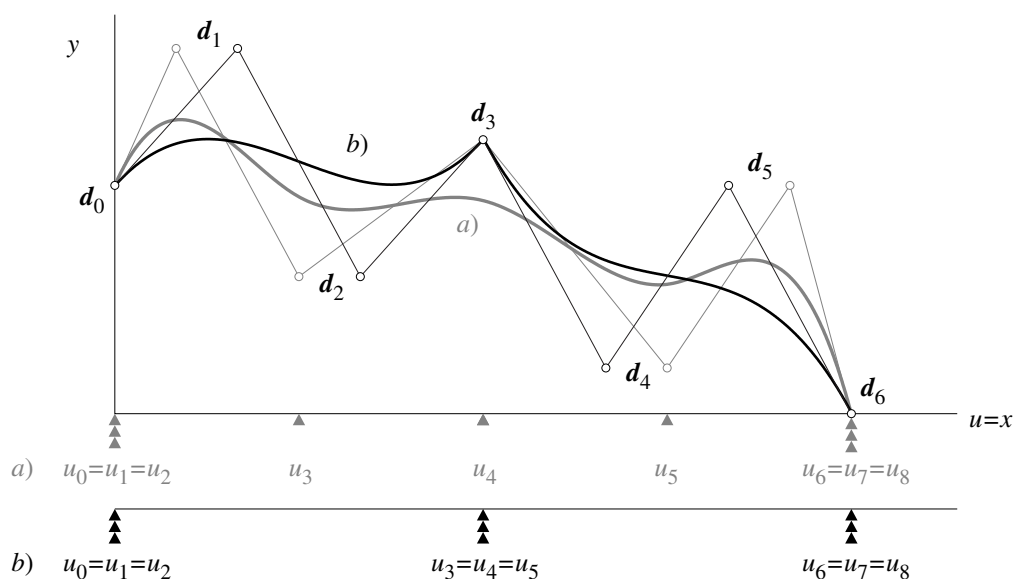


Figura 16 Control de continuïtat en corbes B-spline de grau $n=3$



En les corbes B-spline, la continuïtat mínima en la unió entre trams ve donada per les multiplicitats dels nodes dintre del vector de nodes. En nodes de multiplicitat r , la corba té una continuïtat al menys de C^{n-r} . De l'expressió (16) es dedueix que si un node u_i té multiplicitat $r=n$ llavors $\xi_i = u_i = \dots = u_{i+n-1}$, per tant, com s'ha explicat pel control de pas dels nodes extrems, l'abscissa del punt de control coincideix amb el node. En aquest cas, la corba passa pel punt de control i com a mínim és C^0 .

En la Figura 16 s'observa l'exemple de dues corbes B-spline de grau $n=3$, on el vector de nodes pren diferents valors de multiplicitat pel node central: a) $\mathbf{u}=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1\}$ i b) $\mathbf{u}=\{0,0,0,1/2,1/2,1/2,1,1,1\}$.

A l'igual que succeeix en les corbes de Bézier, per aconseguir continuïtat C^r respecte al paràmetre u en el cas particular d'unió d'una corba B-spline amb un tram recte, n'hi ha prou que els $r+1$ punts de control més propers a la unió es trobin sobre la prolongació del tram recte.

Avantages de les corbes B-spline en front de les corbes de Bézier

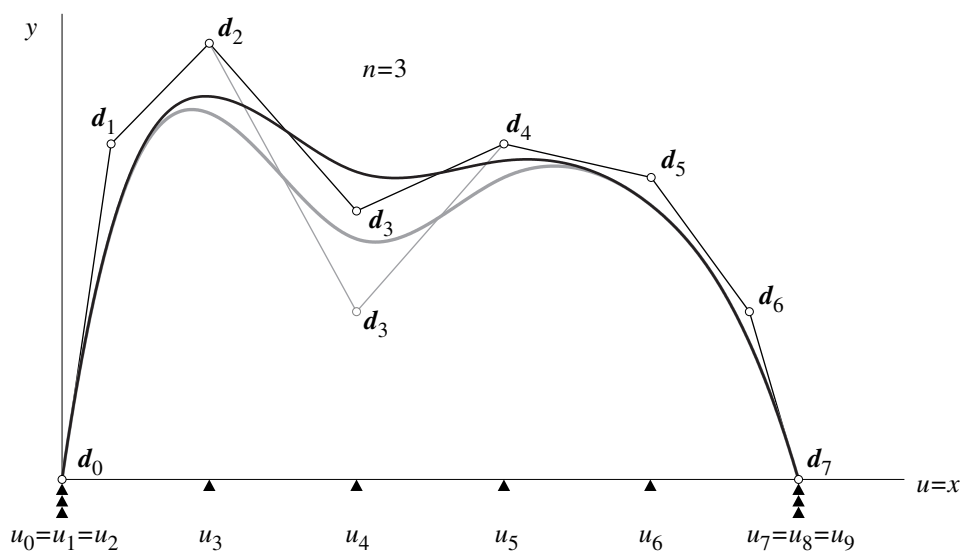


Figura 17 Control local d'una corba B-spline no paramètrica de grau $n=3$.

Per enumerar els avantatges de les corbes B-spline en front de les corbes de Bézier, cal fer notar que una corba de Bézier és un cas particular de corba B-spline. Una corba de Bézier es pot expressar com una corba B-spline d'un únic tram ($L=1$). El vector de nodes ha de tenir n nodes iguals al principi i al final, i cap node intern. Amb aquest vector de nodes, les abscisses de Greville estan equiespaiades, i els punts de control de la corba de Bézier coincideixen amb els punts de control de la corba B-spline.

Aquest fet denota que l'esquema B-spline és més ampli que l'esquema Bézier. Les corbes B-spline resolen també la majoria de limitacions de les corbes de Bézier:



- La continuïtat C^r en la unió entre dos trams consecutius queda automàticament garantida.
- Es poden augmentar el nombre de punts de control de la corba sense augmentar-ne el grau.
- Es té control local sobre la corba. Cada punt de control d_i està relacionat amb una funció base $N_i^n(u)$, i per tant, el canvi de posició d'un punt de control afecta només als trams en els quals aquesta funció base és no nul·la $u_{i-1} \leq u < u_{i+n}$ (Figura 17).
- Es pot canviar la posició de les abscisses dels punts de control.

Exemple de disseny de llei d'acceleracions

En l'exemple de la Figura 18, es mostra la definició de la llei d'acceleracions del moviment d'engegada d'un braç manipulador. Es vol que l'acceleració màxima sigui $a_{m\grave{a}x}$ constant entre t_1 i t_2 i que el transitori d'acceleració s'acabi a t_3 . També es requereix que la continuïtat en les unions dels diferents trams que componen aquesta llei sigui com a mínim C^2 . Finalment es desitja controlar localment la forma de la corba d'acceleració en els trams de pujada i de baixada.

Una possible metodologia de disseny de la llei d'acceleració, per complir les especificacions enunciades seria la següent:

- Grau dels polinomis: en general amb grau $n=3$ serà suficient.
- Punts de pas segons l'especificació: punt a l'inici ($t=0$) i al final ($t=t_3$), i també el punt d'acceleració $a_{m\grave{a}x}$ a t_1 i a t_2 . Es necessitarà un node de multiplicitat $r=3$ per cada punt de pas. El vector de nodes quedarà provisionalment com $\mathbf{u} = \{0, 0, 0, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_3, t_3, t_3\}$.
- Càlcul del paràmetre L provisional: se sap que el subíndex del darrer node és $L+2n-2$ i en aquest cas el darrer node és el u_{11} . Per tant $L=7$.
- Nombre mínim de punts de control: per poder complir la condició de continuïtat C^2 , en cada unió caldrà alinear 3 punts amb els trams d'acceleració constant, nul·la o no nul·la, ja que la multiplicitat dels nodes en les zones d'unió fa que la continuïtat mínima garantida sigui C^0 . Això fa que el polígon de control necessiti 3 punts en 2 unions, més 1 punt de control local del tram, per al tram de pujada (total 7 punts inclosos els d'unió) i el mateix per al tram de baixada.
- Polígon de control provisional: només té $L+n=10$ punts dels quals 4 corresponen a les unions (están sobre els nodes de multiplicitat $r=3$), 2 al tram de pujada, 2 al tram d'acceleració constant i 2 més al tram de baixada.
- Recàlcul del vector de nodes: segons el que s'ha explicat, per als trams de pujada i baixada es necessiten 7 punts (inclosos els d'unió) i ara només n'hi ha 4. Per tant, s'afegiran 3 nodes de multiplicitat $r=1$ (es garanteix C^2) en el tram de pujada i altres 3 en el tram de baixada. El nou vector de nodes, que es proposa, queda finalment com

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, 0, \frac{t_1}{4}, \frac{2t_1}{4}, \frac{3t_1}{4}, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2 + \frac{t_3 - t_2}{4}, t_2 + \frac{2(t_3 - t_2)}{4}, t_2 + \frac{3(t_3 - t_2)}{4}, t_3, t_3, t_3 \right\}$$



En la Figura 18 s'observa aquest exemple de llei d'acceleració i la seva derivada. Es mostra en el cas a) amb simetria de la forma de l'acceleració, i en el cas b) modificant els trams de pujada i baixada de la llei d'acceleració gràcies al punt de control afegit.

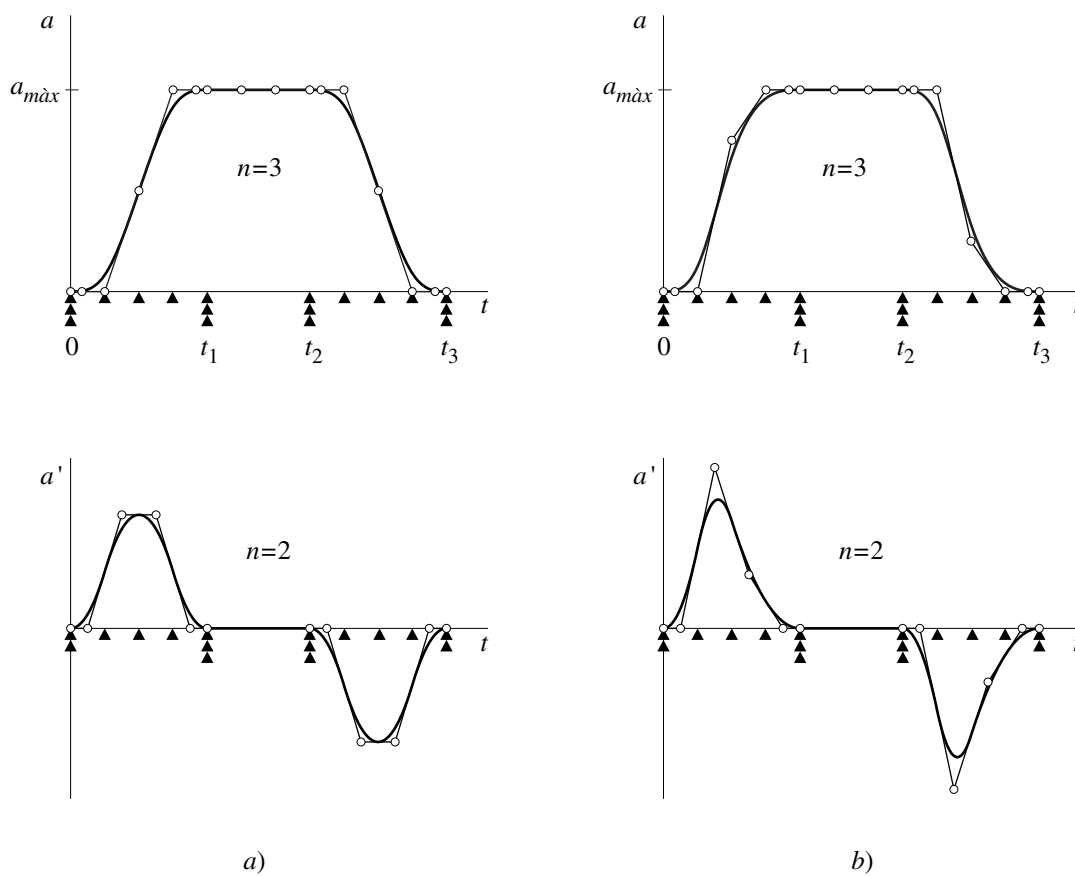


Figura 18 Lleis d'acceleració de grau $n=3$ i les seves derivades, amb punts de control en els trams de pujada i baixada

4 Bibliografia

1. Cardona, S., Clos, D. (2000), *Teoria de Màquines*. Espanya: Edicions UPC.
2. Farin, G.E. (1997), *Curves and Surfaces for CAGD*. USA: Academic Press Inc.
3. Norton R.L. (2002), *Cam Design and Manufacturing Handbook*. USA: Industrial Press, Inc.
4. Norton R.L. (2005), *Diseño de Maquinaria*. Mèxic: Mc Graw-Hill.
5. Reyes, G. (2000), *Tècniques de Diseño Geomètric Asistido por Ordenador para Mecanismos Leva-Palpador*. Espanya: Tesis Doctoral UPC.
6. Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1988), *Teoria de Màquines y Mecanismos*. Mèxic: McGraw-Hill.

