



Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona

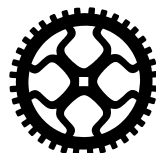
Teoria de Màquines

Problemes elementals de cinemàtica

Salvador Cardona

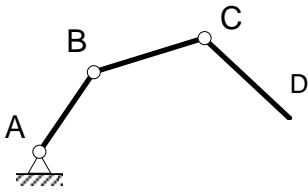
Daniel Clos

1998



Departament d'Enginyeria Mecànica

EXERCICI 2-1



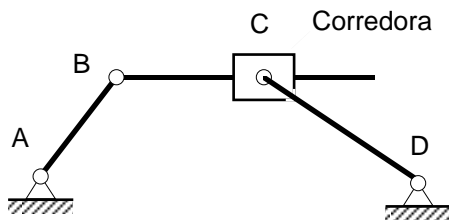
La cadena cinemàtica d'un robot manipulador pla es pot esquematitzar mitjançant 3 bars articulades com s'indica a la figura.

a) Quants graus de llibertat té?

Si en una maniobra el braç CD queda adherit a un obstacle fix,

b) Quants graus de llibertat li queden?

EXERCICI 2-2



El mecanisme de la figura té moviment pla,

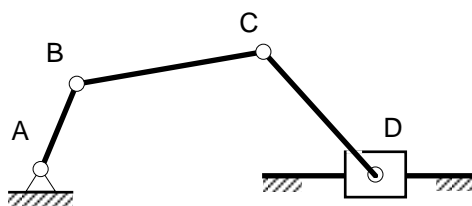
a) Identifiquen els parells cinemàtics.

b) Determineu el nombre de graus de llibertat.

Si la manovella AB es manté fixa,

c) On és el centre instantani de rotació de la corredora.

EXERCICI 2-3



El mecanisme de la figura té moviment pla,

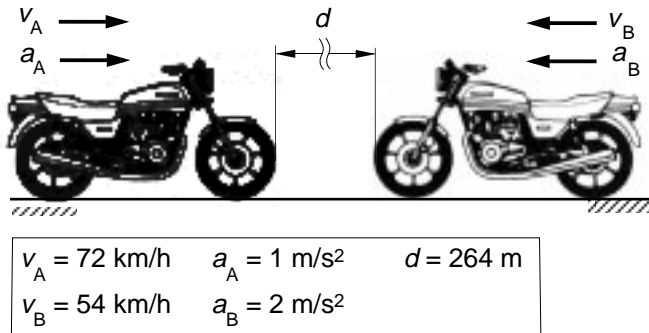
a) Identifiquen els parells cinemàtics.

b) Determineu el nombre de graus de llibertat.

Si la manovella AB es manté fixa,

c) On és el centre instantani de rotació de la barra CD.

EXERCICI 2-4



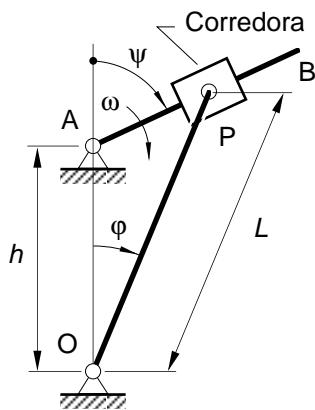
En un cert instant dues motos A i B circulen en sentits oposats per una carretera recta. La moto A té una velocitat $v_A = 72 \text{ km/h}$ i una acceleració $a_A = 1 \text{ m/s}^2$ i la moto B té una velocitat $v_B = 54 \text{ km/h}$ i una acceleració $a_B = 2 \text{ m/s}^2$, Determineu:

- a) La velocitat i acceleració de la moto A respecte a la B, doneu-ne el mòdul i el sentit.

Si l'acceleració és constant i estan separades $d = 264 \text{ m}$,

- b) Quan temps trigen en creuar-se?
 c) Quina velocitat, en m/s, té cadascuna en creuar-se?

EXERCICI 2-5



$h = 200 \text{ mm}$	$L = 250 \text{ mm}$
$\omega = 10 \text{ rad/s}$	

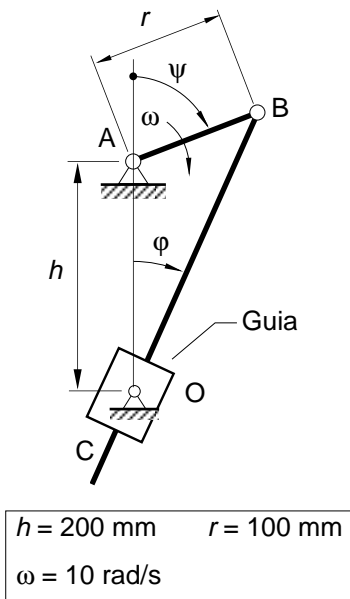
En el mecanisme de la figura:

- a) Identifiqueu els parells cinemàtics.

Determineu:

- b) El centre instantani de rotació absolut de la corredora.
 c) L'angle φ per a la configuració $\psi = 90^\circ$.
 d) La velocitat de lliscament de la corredora per a la configuració anterior, si la velocitat angular de la barra AB és $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

EXERCICI 2-6



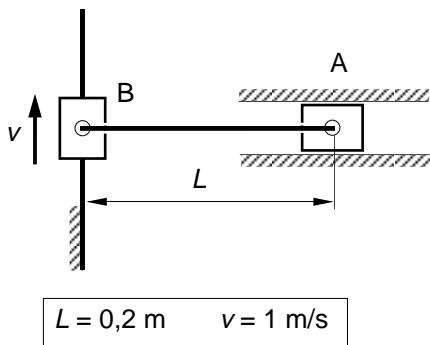
En el mecanisme de la figura,

- a) Identifiqueu els parells cinemàtics.

Determineu:

- b) El centre instantani de rotació absolut de la barra BC.
 c) El valor de l'angle φ en les configuracions d'obertura màxima de la barra BC.
 d) La velocitat de lliscament de la barra BC respecte a la guia en la configuració $\psi = 120^\circ$, si la velocitat angular de la manovella AB és $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

EXERCICI 2-7



En el mecanisme de la figura,

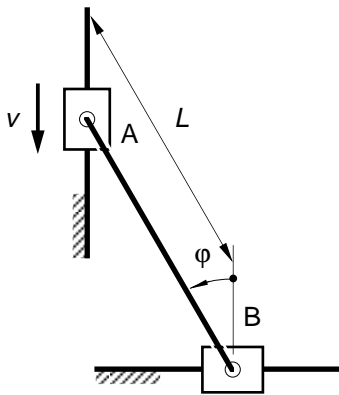
- a) Identifiqueu els parells cinemàtics.

- b) Determineu el centre instantani de rotació absolut de la barra AB?

Si la velocitat del punt B és $v_B = 1 \text{ m/s}$ i la llargària de la barra AB és $L = 0,2 \text{ m}$,

- c) Determineu la velocitat angular de la barra AB a la configuració indicada.

EXERCICI 2-8



$$L = 0,2 \text{ m} \quad v = 1 \text{ m/s} \quad \varphi = 30^\circ$$

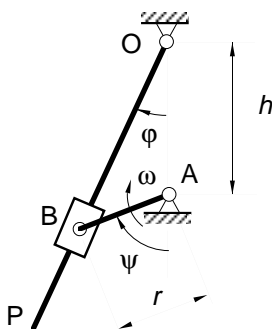
En el mecanisme de la figura,

- Identifiqueu els parells cinemàtics.
- Determineu el centre instantani de rotació absolut de la barra AB.

Si la velocitat del punt A és $v_A = 1 \text{ m/s}$ i la llargària de la barra AB és $L = 0,2 \text{ m}$ per a la configuració $\varphi = 30^\circ$,

- Determineu la velocitat angular de la barra AB i la velocitat del punt B.

EXERCICI 2-9



$$r = 100 \text{ mm} \quad h = 200 \text{ mm} \\ \omega = 10 \text{ rad/s}$$

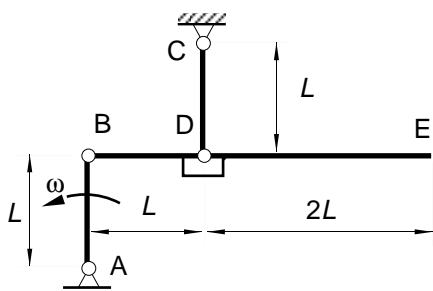
En el mecanisme d'avanç ràpid de la figura,

- Identifiqueu els parells cinemàtics.

Determineu:

- El valor de l'angle φ en les posicions d'obertura màxima de la barra OP.
- La velocitat angular de la barra OP per la configuració $\psi = 0$, si la velocitat angular de la manovella AB és $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

EXERCICI 2-10



$$L = 0,5 \text{ m} \quad \omega = 1 \text{ rad / s}$$

La barra AB del mecanisme de la figura té una velocitat $\omega = 1 \text{ rad/s}$ en la posició representada.

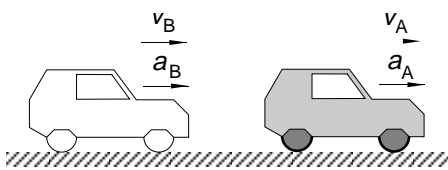
a) Identifiquen els parells cinemàtics.

Determineu:

b) La posició del centre instantani de rotació de la barra BE.

c) La velocitat angular de la barra CD i la velocitat del punt E, en la posició representada.

EXERCICI 2-11



$$\begin{matrix} v_A = 40 \text{ km / h} & v_B = 60 \text{ km / h} \\ a_A = 1 \text{ m / s}^2 & a_B = 2 \text{ m / s}^2 \end{matrix}$$

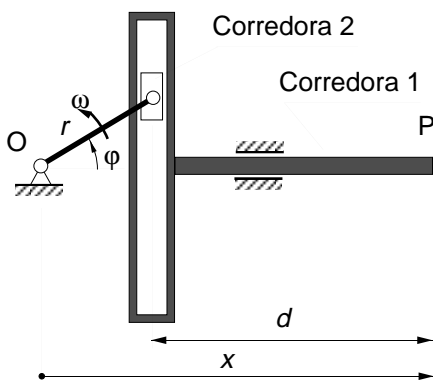
En un cert instant un observador situat al terra veu dos cotxes representats pels punts A i B. El cotxe A té una velocitat de $v_A = 40 \text{ km/h}$ i una acceleració $a_A = 1 \text{ m/s}^2$, mentre que el cotxe B té una velocitat $v_B = 60 \text{ km/h}$ i una acceleració $a_B = 2 \text{ m/s}^2$. Determineu:

a) La velocitat del cotxe A respecte del cotxe B.

b) L'acceleració del cotxe A respecte del cotxe B.

c) L'espai recorregut per cada cotxe quan es troben en el mateix punt si inicialment es troben a $d = 100 \text{ m}$ i l'acceleració d'ambdós cotxes és constant.

EXERCICI 2-12



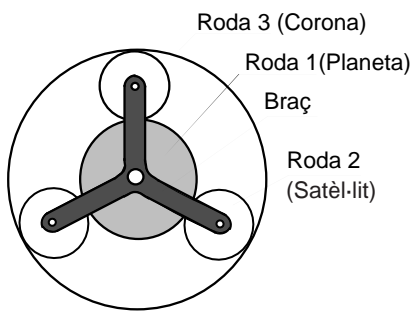
$$r = 100 \text{ mm} \quad \omega = 10 \text{ rad / s}$$

La manovella del jou escocès representat a la figura té un radi $r = 100 \text{ mm}$ i gira a velocitat angular constant $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Determineu

a) La llei temporal del desplaçament, de la velocitat i de l'acceleració de P

b) La velocitat de la corredora 2 respecte a la guia (velocitat de lliscament de la corredora 2 respecte a la guia) quan $\varphi = 60^\circ$

EXERCICI 2-13



$z_1 = 36$	$z_2 = 24$	$z_3 = 84$
------------	------------	------------

En el tren planetari o epicicloïdal simple de la figura el nombre de dents de les rodes són: $z_1 = 36$, $z_2 = 24$, $z_3 = 84$

Si la velocitat angular de la roda 1 és de $\omega_1 = 150$ rad/s i la roda 3 és fixa, determineu:

- a) La velocitat angular de les rodes 2 i del braç.

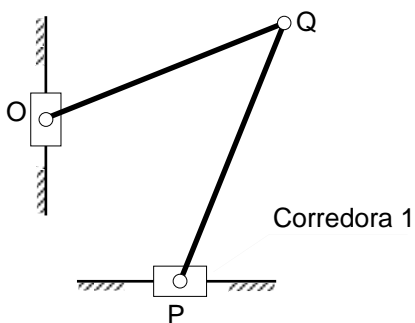
Si la velocitat angular de la roda 1 és de $\omega_1 = 150$ rad/s i el braç és fix, determineu:

- b) La velocitat angular de les rodes 2 i de la roda 3.

Si la velocitat angular del braç és de $\omega_b = 150$ rad/s i la roda 1 és fixa, determineu:

- c) La velocitat angular de les rodes 2 i de la roda 3

EXERCICI 2-14



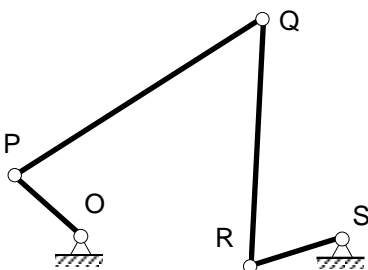
El mecanisme de la figura té moviment pla,

- a) Identifiqueu els parells cinemàtics.
b) Determineu el nombre de graus de llibertat.

Si la corredora 1 es manté fixa,

- c) On és el centre instantani de rotació de la barra OQ?

EXERCICI 2-15



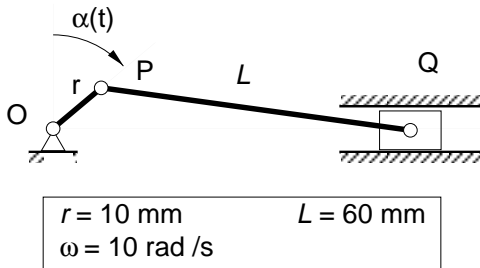
El mecanisme de la figura té moviment pla,

- a) Identifiqueu els parells cinemàtics.
b) Determineu el nombre de graus de llibertat.

Si la barra RS es manté fixa,

- c) On és el centre instantani de rotació de la barra PQ?

EXERCICI 2-16



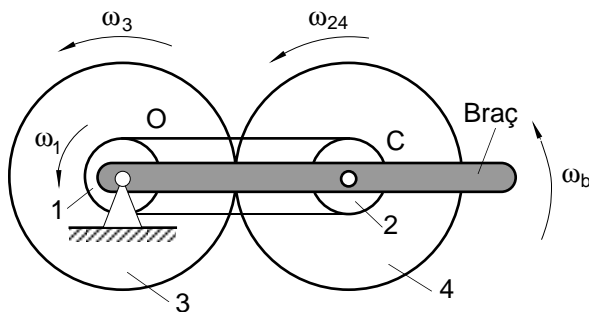
En el mecanisme pistó-biela-manovella de la figura,

- Identifiqueu els parells cinemàtics.
- On és el centre instantani de rotació de la biela PQ?

Si la manovella es mou amb velocitat angular ω constant i considerant que $L > r$ determineu:

- L'expressió temporal aproximada del desplaçament, de la velocitat i de l'acceleració del pistó.

EXERCICI 2-17



En el mecanisme de la figura la politja 1, la roda dentada 3 i el braç giren a l'entorn de l'eix fix que passa per O. La politja 2 i la roda 4 que són solidàries giren conjuntament al voltant de l'eix que passa pel punt C fix al braç. Les politges 1 i 2 estan unides per una corretja dentada i les rodes dentades 3 i 4 estan engranades.

- Determineu el nombre de graus de llibertat del mecanisme.

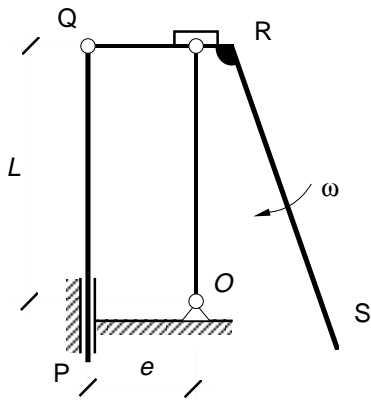
Si la velocitat angular de la politja 1 és $\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$ i la de la roda 3 és $\omega_3 = 2 \text{ rad/s}$ determineu:

- La velocitat angular del conjunt politja 2 roda 4 i del braç.

Si la velocitat angular de la politja 1 és $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ i la del braç és $\omega_b = 5 \text{ rad/s}$ determineu:

- La velocitat angular del conjunt politja 2 roda 4 i de la roda 3.

EXERCICI 2-18



$e = 60 \text{ mm}$	$\omega = 10 \text{ rad/s}$
$L = 160 \text{ mm}$	

La figura esquematitza el mecanisme d'una bomba manual.

a) Identifiqueu els parells cinemàtics.

En la posició representada el braç QR té una velocitat angular ω , determineu:

b) El centre instantani de rotació de tots els membres mòbils.

c) La velocitat del punt P.

Solucions

- E 2-1** a) En ser una cadena cinemàtica oberta el nombre total de graus de llibertat és igual a la suma del nombre de moviments relatius independents permesos per cada parell cinemàtic.
3 articulacions x 1 moviment relatiu independent/articulació = 3 graus de llibertat.
- b) En quedar C fix ABC és un triangle de costats de llargada constant amb la base AC fixa per tant el manipulador no li queda cap grau de llibertat.

- E 2-2** a) Els parells cinemàtics són 4 articulacions i 1 parell prismàtic o guia-corredora.
- b) Fixant la manovella AB (1 grau de llibertat) el mecanisme restant BCD és un pistó-biela-manovella (1 grau de llibertat) així doncs en total es té 2 graus de llibertat.
- c) El centre instantani de rotació de la corredora és la intersecció de la manovella CD amb la perpendicular per B a la guia BC.

- E 2-3** a) Els parells cinemàtics són 4 articulacions i 1 parell prismàtic o guia-corredora.
- b) Fixant la manovella AB (1 grau de llibertat) el mecanisme restant BCD és un pistó-biela-manovella (1 grau de llibertat), així doncs en total es té 2 graus de llibertat.
- c) El centre instantani de rotació de la barra CD és la intersecció de la barra BC amb la perpendicular per D a la guia fixa.

- E 2-4** a) Es pren sentit positiu cap a la dreta. Les dues motos tenen moviment de translació rectilínia respecte a terra, així doncs

$$v_B(A) = v(A) - v(B) = 72 - (-54) = 126 \text{ km/h}$$

$$a_B(A) = a(A) - a(B) = 1 - (-2) = 3 \text{ m/s}^2$$

- b) Respecte a la moto B la moto A té un moviment uniformement accelerat i ha de recorre la distància d per creuar-se amb B, per tant

$$d = v_B(A)t + \frac{1}{2}a_B(A)t^2 \rightarrow t = 6 \text{ s}$$

$$v(A)(t = 6) = v(A)(t = 0) + a(A)t = \frac{72}{3,6} + 1 \cdot 6 = 26 \text{ m/s} = 93,6 \text{ km/h}$$

c)

$$v(B)(t = 6) = v(B)(t = 0) + a(B)t = \frac{54}{3,6} + 2 \cdot 6 = 27 \text{ m/s} = 97,2 \text{ km/h}$$

- E 2-5** a) Els parells cinemàtics són 3 articulacions i 1 parell prismàtic o guia-corredora.
- b) El centre instantani de rotació de la corredora és la intersecció del balanci OP amb la perpendicular per A a la manovella AB.
- c) Per a $\psi = 90^\circ$ OAP és un triangle rectangle de manera que
 $\varphi = \arccos(200/250) = 36,87^\circ$.

- d) La velocitat de lliscament de la corredora és la component de la seva velocitat en la direcció de la guia. Per a $\psi = 90^\circ$ es té $v_{\text{lliscament}} = \omega L \cos(\varphi) = 2 \text{ m/s}$.

- E 2-6** a) Els parells cinemàtics són 3 articulacions i 1 parell prismàtic o guia-corredora.
b) El centre instantani de rotació de la barra BC és la intersecció de la manovella AB amb la perpendicular per O a la barra BC.
c) L'obertura màxima de la barra BC es produeix quan és perpendicular a la manovella AB. En aquesta configuració el triangle ABO és rectangle, així doncs $\varphi = \arcsin(100/200) = 30^\circ$ i $\psi = 120^\circ$.
d) La velocitat de lliscament de la barra BC és la component de la velocitat dels seus punts en la direcció de la guia. Per a $\psi = 120^\circ$ (Configuració anterior) es té $v_{\text{lliscament}} = \omega r = 1 \text{ m/s}$.

- E 2-7** a) Els parells cinemàtics són 2 articulacions i 2 parells prismàtics o guia-corredora.
b) El centre instantani de rotació de la barra AB és el punt A, intersecció de la perpendicular per B a la guia vertical amb la perpendicular per A a la guia horitzontal.
c) Per a l'estudi de les velocitats el moviment de la barra en aquesta configuració és equivalent a una rotació al voltant de A, així doncs $\omega = v/L = 1/0,2 = 5 \text{ rad/s}$.

- E 2-8** a) Els parells cinemàtics són 2 articulacions i 2 parells prismàtics o guia-corredora.
b) El centre instantani de rotació de la barra AB és intersecció de la perpendicular per A a la guia vertical amb la perpendicular per B a la guia horitzontal.
c) A, B i el centre instantani de rotació defineixen un triangle rectangle i per tant la distància de A a aquest és $L \sin(\varphi)$. Per a l'estudi de les velocitats el moviment de la barra en aquesta configuració és equivalent a una rotació al voltant del centre instantani, per tant $\omega = v/(L \sin(\varphi)) = 1/(0,2 \sin(30^\circ)) = 10 \text{ rad/s}$.

- E 2-9** a) Els parells cinemàtics són 3 articulacions i 1 parells prismàtic o guia-corredora.
b) L'obertura màxima de la barra OP es produeix quan és perpendicular a la manovella AB. En aquesta configuració el triangle ABO és rectangle i per tant $\varphi = \arcsin(100/200) = 30^\circ$ i $\psi = 120^\circ$.
c) La velocitat de B és ωr i en aquesta configuració no hi ha lliscament entre la guia i la corredora de manera que $\omega(OP) = \omega r/(r+h) = 10 \cdot 100/(100+200) = 10/3 \text{ rad/s}$.

- E 2-10** a) El mecanisme té 4 articulacions.
b) En la configuració dibuixada la barra BE té moviment de translació horitzontal. El centre instantani es troba a l'infinit en la direcció vertical (Intersecció de les barres AB i CD).

- c) La barra BE té moviment de translació i per tant tot els seus punts tenen la mateixa velocitat i per tant

$$v(E) = v(D) = v(B) = \omega L = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m/s.}$$

$$\omega(CD) = v(D)/L = 1 \text{ rad/s.}$$

- E 2-11 a)** Es pren sentit positiu cap a la dreta. Els dos cotxes tenen moviment de translació rectilínia respecte a terra per tant la velocitat relativa és

$$v_B(A) = v(A) - v(B) = 40 - (60) = -20 \text{ km/h.}$$

- b) $a_B(A) = a(A) - a(B) = 1 - 2 = -1 \text{ m/s}^2$.

- c) Prenent com origen de desplaçaments la posició inicial de B els dos cotxes es trobaran quan

$$v(A)t + \frac{1}{2}a(A)t^2 + 100 = v(B)t + \frac{1}{2}a(B)t^2 \text{ d'on } t = 9,639 \text{ s.}$$

$$s(A) = v(A)t + \frac{1}{2}a(A)t^2 = 153,5 \text{ m}$$

$$s(B) = v(B)t + \frac{1}{2}a(B)t^2 = 253,5 \text{ m}$$

- E 2-12 a)** El moviment de la corredora 1 és igual al moviment horitzontal de l'extrem de la manovella, així doncs

$$x = d + r \cos(\varphi) = d + r \cos(\omega t) = d + 100 \cos(10t) \text{ mm}$$

$$v = -r \omega \sin(\omega t) = -100 \sin(10t) \text{ m/s}$$

$$a = -r \omega^2 \cos(\omega t) = -1000 \cos(10t) \text{ m}^2/\text{s}$$

- b) El moviment de la corredora 2 respecte a la corredora 1 és igual al moviment vertical de l'extrem de la manovella, per tant

$$x_{\text{vertical}} = r \sin(\varphi) = r \sin(\omega t)$$

$$v_{\text{lliscament}} = r \omega \cos(\omega t) = 100 \cdot 10 \cdot \cos(60^\circ) = 500 \text{ mm/s}$$

- E 2-13** Vist des del braç 2 la roda 1 (planeta), una roda 2 (satèl·lit) i la roda 3 (corona) constitueixen un tren d'engranatges d'eixos fixos.

$$\omega_{\text{braç}}(\text{roda 1}) = \omega(\text{roda 1}) - \omega(\text{braç}) = \omega_1 - \omega_b$$

$$\omega_{\text{braç}}(\text{roda 2}) = \omega(\text{roda 2}) - \omega(\text{braç}) = \omega_2 - \omega_b$$

$$\omega_{\text{braç}}(\text{roda 3}) = \omega(\text{roda 3}) - \omega(\text{braç}) = \omega_3 - \omega_b$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} = -\frac{z_1}{z_2} ; \quad \frac{\omega_3 - \omega_b}{\omega_2 - \omega_b} = \frac{z_2}{z_3}$$

Conegudes dues velocitats angulars les altres dues es troben a partir d'aquest sistema de dues equacions. Si no cal determinar la velocitat angular dels satèl·lits es pot aplicar directament l'equació de Willis procedent d'eliminar ω_2 del sistema d'equacions (simplement multiplicant-les).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\omega_2 - \omega_b}{150 - \omega_b} &= -\frac{36}{24}; & \frac{0 - \omega_b}{\omega_2 - \omega_b} &= \frac{24}{84} \rightarrow & \omega_2 &= -112,5 \text{ rad/s} \\
 & & & & \omega_b &= 45 \text{ rad/s} \\
 \text{b) } \frac{\omega_2 - 0}{150 - 0} &= -\frac{36}{24}; & \frac{\omega_3 - 0}{\omega_2 - 0} &= \frac{24}{84} \rightarrow & \omega_2 &= -225 \text{ rad/s} \\
 & & & & \omega_3 &= -64,29 \text{ rad/s} \\
 \text{c) } \frac{\omega_2 - 150}{0 - 150} &= -\frac{36}{24}; & \frac{\omega_3 - 150}{\omega_2 - 150} &= \frac{24}{84} \rightarrow & \omega_2 &= 375 \text{ rad/s} \\
 & & & & \omega_3 &= 214,3 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

E 2-14 a) El mecanisme té 3 articulacions i 2 parells prismàtics o guia-corredora.

- b) Si es fixa la corredora 1 (1 grau de llibertat) OQP és un mecanisme de pistó-biela-manovella (1 grau de llibertat) així doncs en total es tenen 2 graus de llibertat.
- c) El centre instantani de rotació de la barra OQ es la intersecció de la perpendicular per O a la guia vertical amb la barra PQ.

E 2-15 a) El mecanisme té 5 articulacions.

- b) Si es fixa la manovella RS (1 grau de llibertat) OPQR és un quadrilàter articulat (1 grau de llibertat) per tant en total es tenen 2 graus de llibertat.
- c) El centre instantani de rotació de la barra PQ es la intersecció de les barres OP i QR.

E 2-16 a) Els parells cinemàtics són 3 articulacions i 1 parells prismàtic o guia-corredora.

- b) El centre instantani de rotació de la biela PQ es la intersecció de la perpendicular per Q a la guia horitzontal amb la manovella OP.
- c) Si $L \gg r$ la barra PQ varia poc d'orientació i la seva projecció sobre l'horitzontal OQ canvia poc, així doncs en primera aproximació el moviment horitzontal de Q és semblant al de P. Prenent com origen de desplaçaments la posició de Q quan $\alpha = 0$

$$d(t) \approx r \sin(\alpha(t)) = r \sin(\omega t) = 10 \sin(10t) \text{ mm}$$

$$v(t) \approx r \omega \cos(\omega t) = 100 \cos(10t) \text{ mm/s}$$

$$a(t) \approx -r \omega^2 \sin(\omega t) = -1000 \sin(10t) \text{ mm/s}^2$$

E 2-17 Vist des del braç 3 les rodes dentades 2 i 5 constitueixen un engranatge d'eixos fixos i les politges 1 i 4 formen una transmissió de politges també d'eixos fixos. Així doncs

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{\text{braç}}(\text{politja 1}) &= \omega_1 - \omega_b \\
 \omega_{\text{braç}}(\text{politja 2}) &= \omega_{24} - \omega_b
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega_1 = \omega_{24}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{\text{braç}}(\text{roda 3}) &= \omega_3 - \omega_b \\
 \omega_{\text{braç}}(\text{roda 4}) &= \omega_{24} - \omega_b
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega_3 - \omega_b = -(\omega_{24} - \omega_b)$$

- a) Si es fixa el braç (1 grau de llibertat) el conjunt politja 2 roda 34 encara pot girar (1 grau de llibertat) per tant en mecanisme té 2 graus de llibertat.

A les 2 equacions anteriors hi apareixen 4 variables per tant només dues són independents i el nombre de graus de llibertat és 2.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left. \begin{array}{l} 8 = \omega_{24} \\ 2 - \omega_b = -\omega_{24} + \omega_b \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \omega_{24} = 8 \text{ rad/s} \\ \omega_b = 5 \text{ rad/s} \end{cases} \\ \text{c) } & \left. \begin{array}{l} 10 = \omega_{24} \\ \omega_3 - 5 = -\omega_{24} + 5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \omega_{24} = 10 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 0 \text{ rad/s} \end{cases} \end{aligned}$$

E 1-18 a) Els parells cinemàtics són 3 articulacions i 1 parell prismàtic o guia-corredora.

- b) La barra PQ té moviment de translació vertical i per tant el seu centre instantani de rotació es troba a l'infinit en la direcció horitzontal. La barra OP gira a l'entorn del punt O així doncs aquest punt és el seu centre instantani de rotació. El centre instantani de rotació del braç QRS és el punt R (intersecció de la perpendicular per Q a la guia i a la barra OR).
- c) La barra PQ té moviment de translació per tant $v(P) = v(Q) = \omega e = 600 \text{ mm/s}$.