



Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona

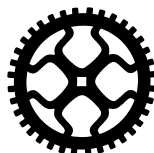
# **Teoria de Màquines**

**Problemes elementals. Miscel·lània**

Salvador Cardona

Daniel Clos

1998



Departament d'Enginyeria Mecànica

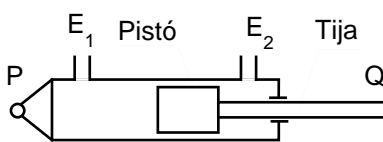
### EXERCICI 8-1

Citeu, com a mínim tres característiques oposades entre un cilindre hidràulic i un de pneumàtic. Dibuixeu l'esquema d'un cilindre de simple acció i d'un de doble acció.

### EXERCICI 8-2

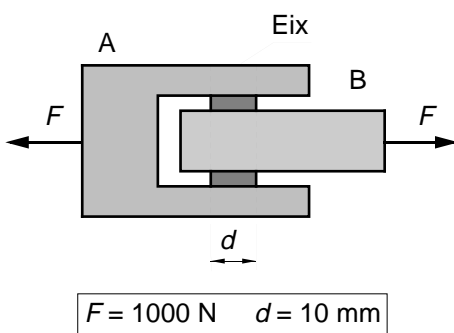
Definiu que són les vies i quin és el nombre típic d'aquestes en un distribuïdor hidràulic o pneumàtic. Dibuixeu l'esquema d'un distribuïdor de 4 vies i dues posicions.

### EXERCICI 8-3



En el cilindre pneumàtic de la figura que només disposa de tija en un extrem la secció del pistó és  $s_p$  i la de la tija és  $s_t$ . Si  $E_1$  es connecta a l'alimentació de pressió relativa  $p_1$  i  $E_2$  a un punt del circuit pneumàtic de pressió relativa  $p_2$ , determineu la força entre els extrems P i Q del cilindre (pressió atmosfèrica absoluta  $p_0$ ).

### EXERCICI 8-4



Les dues peces A i B estan unides per una articulació i sotmeses a la força de tracció  $F = 1000$  N. El diàmetre de l'eix de l'articulació és  $d = 10$  mm. Per aquest eix

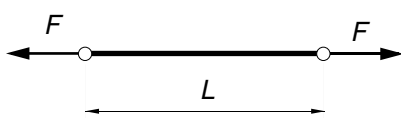
- Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure.
- Determineu l'esforç tallant.

### EXERCICI 8-5

En el comportament a tracció dels materials dúctils es distingeixen els esforços corresponents a: límit elàstic  $\sigma_e$ , límit de ruptura  $\sigma_r$  i límit de fatiga  $\sigma_f$ .

- Ordeneu aquests esforços de més petit a més gran.
- Com cal escollir l'esforç de treball  $\sigma_t$  d'un element mecànic sotmès a esforços variables?.

### EXERCICI 8-6



$L = 1 \text{ m}$	$s = 100 \text{ mm}^2$
$F = 1000 \text{ N}$	$E = 200 \text{ GPa}$

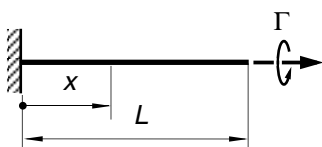
La barra cilíndrica de la figura de llargada  $L = 1 \text{ m}$  i secció  $s = 10 \text{ mm}^2$  està sotmesa a una força de tracció  $F = 1000 \text{ N}$ . El mòdul d'elasticitat longitudinal de la barra és  $E = 200 \text{ GPa}$ . Determineu:

- L'esforç axial de la barra.
- La deformació de la barra.
- L'allargament total de la barra.

### EXERCICI 8-7

- Indiqueu 4 tipus d'estat de càrrega d'una barra i feu-ne un esquema de cadascun.
- Per a quin estat de càrrega es pot produir el fenomen de vinclament?
- Quina característica d'un material dóna la relació esforç-deformació per a una força de tracció i per a un parell de torsió?

### EXERCICI 8-8



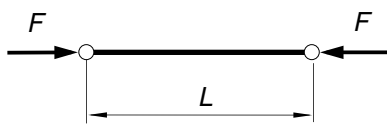
$$J = \pi r^4 / 2$$

$r = 20 \text{ mm}$	$L = 1 \text{ m}$
$\Gamma = 1 \text{ kN m}$	$G = 80 \text{ GPa}$

L'eix d'acer cilíndric i massís de la figura té una llargada  $L = 1 \text{ m}$  i un radi  $r = 20 \text{ mm}$  i es troba sotmès a un parell de torsió  $\Gamma = 1000 \text{ N m}$ . El mòdul d'elasticitat transversal de l'acer és  $G = 80 \text{ GPa}$ . Determineu:

- L'esforç tallant màxim  $\tau_{\text{màx}} = \Gamma r / J$  i on es produeix.  $J$  és el moment axial de segon ordre de la secció de la barra.
- L'angle girat per la secció de l'extrem lliure de l'eix  $\varphi = (\Gamma L) / (G J)$  i dibuixeu el gràfic de l'angle girat per cada secció funció de  $x$ .

### EXERCICI 8-9



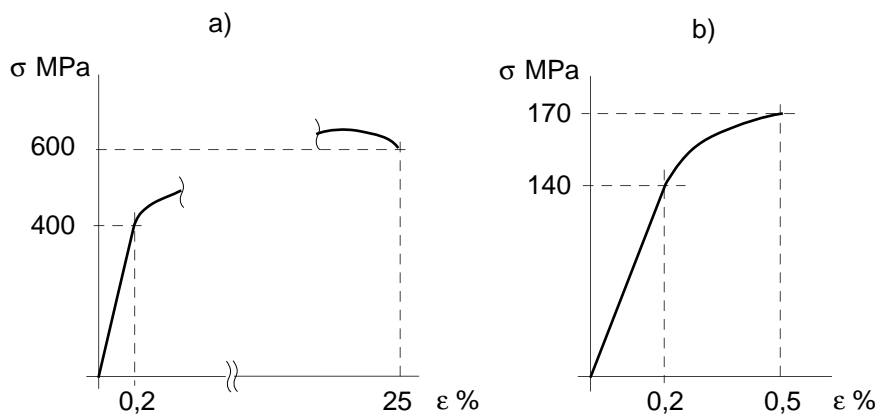
$$I = \pi r^4/4$$

$r = 20 \text{ mm}$	$L = 1,5 \text{ m}$
$F = 100 \text{ kN}$	$E = 210 \text{ GPa}$

La barra articulada de la figura és massissa i articulada en els seus extrems, té una llargada  $L = 1,5 \text{ m}$  i una secció circular de radi  $r = 20 \text{ mm}$  i està sotmesa a una força de compressió  $F = 100 \text{ kN}$ . El mòdul d'elasticitat longitudinal del material de la barra és  $E = 210 \text{ GPa}$ . Determineu:

- L'esforç axial de la barra.
- La variació de longitud de la barra causada per la força  $F$ .
- La càrrega crítica de vinclament  $F_{\text{crít}} = \pi^2 EI/L^2$ .  $I$  és el moment transversal de segon ordre de la secció de la barra.

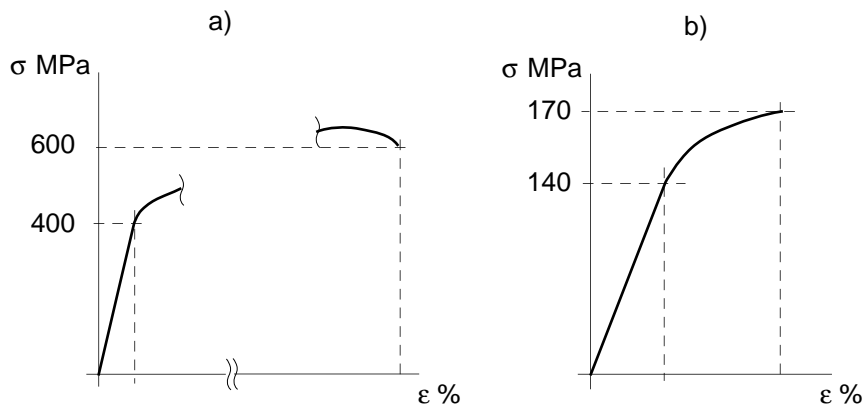
### EXERCICI 8-10



A la figura es presenten les corbes esforç-deformació de dos materials a i b amb identificació dels límits elàstic i de ruptura.

- Els materials són dúctils o fràgils?, per què?
- Determineu el mòdul d'elasticitat longitudinal de cadascun dels materials.
- Cal una barra cilíndrica de secció no superior a  $s = 20 \text{ mm}^2$  per suportar una tracció  $F = 3 \text{ kN}$ , quin material cal escollir per tal que no sofreixi deformacions permanents?

### EXERCICI 8-11



A la figura es presenten les corbes esforç-deformació de dos materials a i b amb identificació dels límits elàstic i de ruptura. El mòdul d'elasticitat longitudinal de cadascun dels materials és  $E_a = 200$  GPa i  $E_b = 70$  GPa.

- Els materials són dúctils o fràgils?, per què?
- Determineu la deformació en el límit elàstic de cadascun dels materials.
- Es sotmet una barra cilíndrica de secció  $s = 20$  mm<sup>2</sup> a una força de tracció  $F = 9$  kN, quines conseqüències s'en deriven per a cada material?

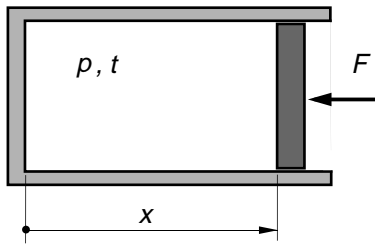
### EXERCICI 8-12

En un dipòsit es troba un gas a pressió relativa  $p_1 = 10^6$  Pa i temperatura  $t_1 = 20$  °C. Es fa augmentar la temperatura fins a  $t_2 = 80$  °C. Determineu la nova pressió relativa si es considera el gas perfecte i el dipòsit no modifica el seu volum. (Preneu la pressió atmosfèrica  $p_0 = 1$  bar).

### EXERCICI 8-13

En un dipòsit es troba un gas a un volum  $V_1$  a una pressió relativa  $p_1 = 5$  bar i a una temperatura  $t_1 = 20$  °C. Es fa disminuir a la meitat el volum i la temperatura passa a ser  $t_2 = 40$  °C. Determineu la nova pressió relativa si es considera el gas perfecte. (Preneu la pressió atmosfèrica  $p_0 = 1$  bar).

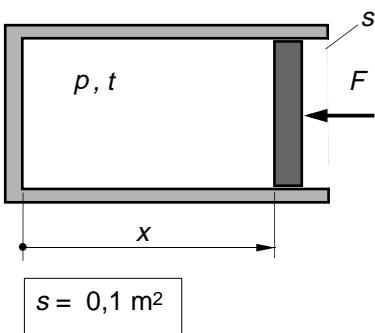
### EXERCICI 8-14



El recipient de la figura és cilíndric i l'èmbol desplaçable tanca hermèticament. A partir de l'estat  $F = 0$ ,  $x_1 = 60$  cm,  $t = 20$  °C, s'eleva la temperatura del gas fins a  $80$  °C, determineu:

- La posició del pistó a  $80$  °C.
- La pressió relativa a l'interior del recipient si mantenint la nova temperatura amb la força  $F$  es retorna l'èmbol a la posició inicial. (Preneu la pressió atmosfèrica  $p_0 = 1$  bar).

### EXERCICI 8-15



El recipient de la figura és cilíndric, de secció  $s = 0,1$  m<sup>2</sup>, i l'èmbol desplaçable tanca hermèticament. A partir de la configuració  $x_1 = 60$  cm,  $F = 0$  es comprimeix el gas de l'interior del recipient augmentant la força  $F$  i mantenint la temperatura del gas constant. Determineu per a  $F = 20$  kN:

- La pressió relativa de l'interior del recipient.
- La posició  $x$  del pistó.

### EXERCICI 8-16

El coeficient de freg entre les rodes d'un cotxe, de massa  $m = 1000$  kg, i el terra és  $\mu = 0,8$ . El cotxe circula en línia recta per una carretera horitzontal a  $v = 86,4$  km/h i s'accionen els frens per obtenir la màxima capacitat de frenada, determineu:

- La força horitzontal que el cotxe rep de la carretera ( mòdul i sentit).
- L'acceleració de frenada.
- El temps i l'espai mínim per frenar.

## Solucions

<b>E 8-1</b>	Cilindre hidràulic	Cilindre pneumàtic
	Pesat	Lleuger
	Lent	Ràpid
	Forces molt grans	Forces no massa grans
	Control lineal	Control tot o res

En un cilindre de simple acció la tija només surt per un extrem i en un de doble acció surt pels dos extrems.

**E 8-2** Les vies d'un distribuïdor són els seus punts d'unió amb la resta del circuit pneumàtic o hidràulic. El nombre mínim de vies és dos i el típic és quatre.

En un distribuïdor de quatre vies dues es poden considerar d'entrada i dues de sortida. Si el distribuïdor té dues posicions la correspondència entrada-sortida de les vies es permuta en passar d'una a l'altre.

**E 8-3** La resultant de les forces que l'aire fa sobre el conjunt pistó-tija és, prenent sentit positiu cap a la dreta,  $s_p(\rho_1 + \rho_0) - (s_p - s_t)(\rho_2 + \rho_0) - s_t\rho_0 = s_p\rho_1 - (s_p - s_t)\rho_2$ . La resultant de les forces que fa l'aire sobre el cilindre és del mateix mòdul i sentit contrari. Així doncs la força entre els punt P i Q és  $s_p\rho_1 - (s_p - s_t)\rho_2$  de repulsió.

**E 8-4** a) Les forces exteriors que actuen sobre l'eix són: La força  $F$  cap a la dreta que li fa l'element B i les forces  $F_1$  i  $F_2$  que li fan cadascun dels braços de la peça A i que donada la simetria en la geometria i en l'aplicació de les forces valen  $F/2$  (Aquesta afirmació es justifica fent  $\sum F_{\text{ext}} = 0$  i  $\sum M_{\text{ext}} = 0$  per a la peça A.

b) L'eix té dues seccions sotmeses a tall i en cadascuna la força tallant és  $F_t = F/2$ . L'esforç tallant mig  $\sigma_t$  (força tallant per unitat de secció) és  $\sigma_t = F_t/s = 12,73 \text{ MPa}$ .

**E 8-5** a)  $\sigma_f < \sigma_e < \sigma_r$

b)  $\sigma_t < \sigma_f$

**E 8-6** a) L'esforç axial, força axial per unitat de secció de la barra, és  $\sigma_A = F/s = 10^8 \text{ Pa}$ .

b) La deformació longitudinal de la barra a partir del mòdul d'elasticitat longitudinal  $E$  (quocient entre l'esforç i la deformació) és  $\varepsilon = \sigma_A/E = 5 \cdot 10^{-4} = 0,05\%$ .

c) La deformació longitudinal és l'increment de llargada per unitat de llargada  $\varepsilon = \Delta L/L$ . Així doncs l'allargament total de la barra és  $\Delta L = \varepsilon L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,5 \text{ mm}$ .

**E 8-7** a) Tracció. Sobre els extrems de la barra actuen forces axials que tendeixen a separar-los i per tant a allargar la barra sense corbar l'eix.

Compressió. Sobre els extrems actuen forces axials que tendeixen a escurçar-la sense corbar l'eix.

Torsió. Sobre els extrems actuen moments axials que tendeixen a fer girar un extrem respecte a l'altre i per tant torçar la barra sense corbar l'eix.

Flexió. Sobre la barra actuen forces i/o moments transversals perpendiculars a l'eix que la deformen corbant-lo.

b) El vinclament es pot produir en barres sotmeses a compressió.

c) El mòdul d'elasticitat longitudinal  $E$  dona la relació esforç-deformació en una barra sotmesa a tracció i/o compressió.  $E = \sigma/\varepsilon$ .

El mòdul d'elasticitat transversal  $G$  dona la relació esforç-deformació en una barra sotmesa a torsió.

**E 8-8** a) L'esforç tallant és màxim a la tota la superfície exterior de la barra i val

$$\tau_{\text{màx}} = \frac{\Gamma r}{J} = \frac{\Gamma r}{\pi r^4/2} = 79,58 \text{ MPa.}$$

b) L'angle girat per cada secció és proporcional a la seva distància  $x$  a la secció encastada i per a l'extrem lliure de l'eix és

$$\varphi = \frac{\Gamma L}{GJ} = \frac{\Gamma L}{G\pi r^4/2} = 49,74 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 2,85^\circ.$$

**E 8-9** a) L'esforç axial de la barra és  $\sigma_A = F/s = 79,58 \text{ MPa}$ .

b) La disminució de llargada és  $\Delta L = \sigma L/E = 568,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,5684 \text{ mm}$ .

c) La càrrega crítica de vinclament és  $F_{\text{crít}} = \pi^2 EI/L^2 = 115,8 \text{ kN}$ .

**E 8-10** a) El material a és dúctil ja que es deforma molt abans de trencar-se i el material b és fràgil a causa de la seva poca deformació abans de trencar-se.

b) El mòdul d'elasticitat longitudinal és el quocient entre l'esforç i la deformació longitudinals en la zona de comportament elàstic així doncs

$$E_a = \frac{\sigma_{ea}}{\varepsilon_{ea}} = \frac{400 \cdot 10^6}{0,002} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 200 \text{ GPa.}$$

$$E_b = \frac{\sigma_{eb}}{\varepsilon_{eb}} = \frac{140 \cdot 10^6}{0,002} = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 70 \text{ GPa.}$$

c) L'esforç de treball de la barra és  $\sigma_t = F/s = 150 \text{ MPa}$ , per tant cal escollir el material a ja que aquest esforç supera el límit elàstic del material b.



**E 8-11 a)** El material a és dúctil ja que es deforma molt abans de trencar-se i el material b és fràgil a causa de la seva poca deformació abans de trencar-se.

b) El mòdul d'elasticitat longitudinal és el quocient entre l'esforç i la deformació longitudinals en la zona de comportament elàstic així doncs

$$\varepsilon_{ea} = \frac{\sigma_{eb}}{E_a} = \frac{400 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-3} = 0,2\%.$$

$$\varepsilon_{eb} = \frac{\sigma_{eb}}{E_b} = \frac{140 \cdot 10^6}{70 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-3} = 0,2\%.$$

c) L'esforç de treball de la barra és  $\sigma_t = F/s = 450 \text{ MPa}$ , per tant si la barra és del material a només es sobrepassa lleugerament el límit elàstic i si la barra és del material b es trenca ja que es supera en molt el límit de ruptura.

**E 8-12** L'equació d'estat del gasos perfectes és  $pV/T = \text{constant}$  essent  $p$  la pressió absoluta,  $V$  el volum ocupat i  $T$  la temperatura termodinàmica o absoluta (en K - Kelvin-,  $T = \text{temperatura Celsius} + 273,15$ ).

$$\frac{(p_1 + p_0)V_1}{(t_1 + 273,15)} = \frac{(p_2 + p_0)V_2}{(t_2 + 273,15)} ; V_1 = V_2 ;$$

$$p_2 = \frac{(p_1 + p_0)}{(t_1 + 273,15)}(t_2 + 273,15) - p_0 = 1,225 \text{ MPa} = 12,25 \text{ bar}.$$

**E 8-13** De manera semblant a l'exercici anterior E 8-12,

$$\frac{(p_1 + p_0)V_1}{(t_1 + 273,15)} = \frac{(p_2 + p_0)V_2}{(t_2 + 273,15)} ; V_2 = V_1/2 ;$$

$$p_2 = \frac{(p_1 + p_0)V_1}{(t_1 + 273,15)} \frac{(t_2 + 273,15)}{V_2} - p_0 = 1,182 \text{ MPa} = 11,82 \text{ bar}.$$

**E 8-14 a)** Si la força  $F$  es manté nul·la la pressió a l'interior del cilindre es manté igual a la pressió atmosfèrica. De l'equació del gasos perfectes i anomenant  $s$  la secció del cilindre,

$$\frac{(p_1 + p_0)V_1}{(t_1 + 273,15)} = \frac{(p_2 + p_0)V_2}{(t_2 + 273,15)} ; p_1 = p_2 ; V_1 = s x_1 ; V_2 = s x_2 ;$$

$$\frac{s x_1}{(t_1 + 273,15)} = \frac{s x_2}{(t_2 + 273,15)} ; x_2 = \frac{(t_2 + 273,15)}{(t_1 + 273,15)} x_1 = 72,28 \text{ cm}.$$

b) Si es retorna l'èmbol a la posició inicial ,

$$\frac{(p_2 + p_0)V_2}{(t_2 + 273,15)} = \frac{(p_3 + p_0)V_3}{(t_3 + 273,15)} ; t_3 = t_2 ; V_2 = s x_2 ; V_3 = s x_1 ;$$

$$(p_2 + p_0)s x_2 = (p_3 + p_0)s x_1 ; p_3 = \frac{(p_2 + p_0) x_2}{x_1} - p_0 = 0,2048 \text{ bar}.$$

**E 8-15 a)**  $p_2 = F/s = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2 \text{ bar}$ .

b) De l'equació del gasos perfectes,

$$\frac{(p_1 + p_0)V_1}{(t_1 + 273,15)} = \frac{(p_2 + p_0)V_2}{(t_2 + 273,15)} ; t_1 = t_2 ; V_1 = s x_1 ; V_2 = s x_2 ;$$

$$(p_1 + p_0)s x_1 = (p_2 + p_0)s x_2 ; x_2 = \frac{(p_1 + p_0)}{(p_2 + p_0)} x_1 = 20 \text{ cm}.$$

**E 8-16 a)** Les forces exteriors que actuen sobre el cotxe són: el pes la força normal que rep de la carretera i la força horitzontal causada pel frec.

Fent la suma de forces en la direcció vertical i prenent sentit positiu cap amunt:

$\sum F_v = N - mg = 0$  d'on  $N = mg = 10 \text{ kN}$  i per tant la força de frec màxima en sentit contrari al d'avanç és  $F_{m\grave{a}x} = \mu N = 0,8 \cdot 10^4 = 8 \text{ kN}$

b) En direcció horitzontal i prenent sentit positiu la direcció d'avanç

$$\sum F_h = -F_{m\grave{a}x} = ma \text{ d'on } a = -8 \text{ m/s}^2.$$

c) Si es manté la màxima capacitat de frenada l'acceleració és constant i

$$v_{\text{final}} = v_{\text{inicial}} + at = 0 \text{ d'on } t = -\frac{v}{a} = -\frac{86,4/3,6}{-8} = 3 \text{ s}.$$

$$d_{\text{final}} = d_{\text{inicial}} + v_{\text{inicial}}t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{86,4}{3,6}3 + \frac{1}{2}(-8)3^2 = 36 \text{ m}.$$