



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

# **L'enginy al servei de la Teoria de Màquines**

**Suggeriments per treure més profit del PAM**

Salvador Cardona

2006



Departament d'Enginyeria Mecànica



## L'enginy al servei de la Teoria de Màquines

### Suggeriments per treure més profit del PAM

#### 1 *Com obtenir la distància entre dos punts*

Col·loqueu una molla lineal entre els dos punts i demaneu la seva llargada.

Si l'anàlisi no és cinemàtica cal que feu nul·les les constants de la molla perquè no introdueixi una força no volguda.

#### 2 *Com conèixer l'interval de variació de llargada d'un actuator lineal*

En ocasions cal emprar un actuator lineal i és difícil a priori conèixer l'interval de variació de la seva llargada. Sovint és més fàcil fer un primer model del mecanisme amb un actuator angular, tot i que no descriu cap realitat física. Si és així:

- i) Modelitzeu el mecanisme amb un actuator angular, col·loqueu una molla lineal entre els dos punts que han de ser extrems de l'actuator lineal i determineu la seva llargada en el marge de moviment previst (només cal fer l'anàlisi cinemàtica).
- ii) Substituïu l'actuator angular per un de lineal que variï la seva llargada dins de l'interval trobat anteriorment.

#### 3 *Com determinar la força d'accionament perpendicular a un mànec(I)*

Aquesta força es pot fer posant en el mànec un piú situat dins d'una ranura paral·lela al mànec.

Així doncs:

- i) Dupliqueu el mecanisme i tindreu un original i un àlies. Els dos mànecs coincidiran sempre que dos punts equivalents, un de cada mecanisme, coincideixin (se suposa que el sistema és d'un grau de llibertat). De fet, amb un grau de llibertat, només cal que coincideixi una coordenada.
- ii) Definiu l'enllaç piú-guia entre els dos mànecs. Feu passar la guia, situada en el mànec àlies, pel punt equivalent del piú, situat en el mànec original. Això garanteix la coincidència dels dos mecanismes sense crear redundàncies. La guia té orientació constant respecte al mànec àlies, i per tant, també respecte al mànec original; en definitiva, la força sobre el mànec original és de direcció constant.
- iii) Definiu les forces i les inèrcies en el mecanisme original i situeu un actuator adequat en l'àlies.
- iv) Demaneu la força en l'enllaç piú-guia.

Si es vol la força en una altra direcció només cal definir l'orientació de la guia perpendicular a la de la força que es vol fer.

Es presenta una situació mal condicionada quan la velocitat del piú té la direcció de la guia.

#### 4 Com determinar la força d'accionament perpendicular a un mànec (II)

Aquesta força es pot fer amb un actuador lineal que es mantingui perpendicular al mànec.

Així doncs:

- i) Dupliqueu el mecanisme i tindreu un original i un al·lies. Els dos mànecs coincidiran sempre que dos punts equivalents, un de cada mecanisme, coincideixin (se suposa que el sistema és d'un grau de llibertat). De fet, amb un grau de llibertat, només cal que coincideixi una coordenada.
- ii) Definiu un actuador lineal de llargada constant (no nul·la per evitar indeterminacions) entre els dos mànecs. Fixeu un extrem de l'actuador al punt corresponent del mànec original i l'altre a un punt del mànec al·lies de manera que l'angle de l'actuador amb el mànec sigui el desitjat i la distància entre ells sigui igual a la llargada de l'actuador. Això garanteix la coincidència dels dos mecanismes i, per tant, l'actuador lineal i la força que fa són de direcció constant respecte al mànec.
- iii) Definiu les forces i les inèrcies en el mecanisme original i situeu un actuador adequat en l'al·lies.
- iv) Demaneu la força de l'actuador.

Si es vol la força en una altra direcció només cal definir de forma correcta l'orientació de l'actuador.

#### 5 Com determinar la força d'accionament en la direcció de la velocitat d'un punt d'un mànec

Es pot considerar que el mànec es manipula amb un actuador angular situat entre ell i la bancada, i a partir del parell que ha de realitzar aquest es calcula la força d'accionament fent ús del mètode de les Potències Virtuals.

Així doncs:

- i) Modelitzeu el mecanisme utilitzant un actuador angular per fer moure el mànec respecte a la bancada (se suposa que el sistema és d'un grau de llibertat).
- ii) Demaneu el parell de l'actuador.
- iii) Plantegeu l'equació de les Potències Virtuals amb un moviment virtual compatible amb les enllaços distingint la potència virtual de l'actuador i la de la resta de forces. Com que es vol tenir el mateix moviment amb l'actuador angular i amb la força d'accionament, la potència virtual de la resta de forces serà la mateixa en els dos casos i per tant també ho han de ser la potència virtual de l'actuador angular i la de la força d'accionament. En definitiva doncs:  
$$\text{Parell actuador} \cdot \text{velocitat angular} = \text{Força d'accionament} \cdot \text{velocitat del punt d'aplicació}.$$

Si es vol la força en una altra direcció només cal tenir en compte que la potència virtual és el producte escalar de la força per la velocitat.

No tots els torsors d'enllaç trobats amb l'actuador angular són equivalents als que es tenen amb la força d'accionament. Coincideixen els torsors dels enllaços que no condicionen cinemàticament el moviment del mànec (si s'aplica el Mètode de les Potències Virtuals "trencant" un enllaç que no afecta la cinemàtica del mànec, la potència virtual del parell de l'actuador angular i de la força d'accionament coincideixen ja que el moviment virtual del mànec és compatible amb els seus enllaços i, per tant, coincideix l'acció d'enllaç "trencat" calculada amb l'un o l'altre).

## 6 Com aplicar una força d'accionament de direcció constant respecte a la bancada (I)

Una força d'aquestes característiques es pot aplicar sobre un piu amb una guia que es trasllada respecte a la bancada i de direcció perpendicular a la de la força desitjada.

Així doncs:

- i) Modelitzeu el mecanisme, de moment sense actuator i amb un sòlid addicional que actuarà de corredora.
- ii) Definiu un parell piu-guia i un parell prismàtic addicionals. Col·loqueu el piu en el punt del mecanisme on voleu aplicar la força d'accionament i la guia sobre la corredora addicional. Feu que l'orientació de la guia del piu sigui perpendicular a la de la força desitjada, ja sigui en la direcció de la guia del parell prismàtic respecte a la bancada o en la direcció de la guia del piu respecte a la corredora.
- iii) Definiu un actuator lineal entre la bancada i la corredora addicional de tal manera que el piu tingui el moviment desitjat en la direcció de la força.
- iv) Demaneu la força en l'enllaç piu-guia.

Procureu utilitzar actuadors amb llargada definida sempre positiva; en cas contrari, la situació de la corredora no queda determinada.

## 7 Com aplicar una força d'accionament de direcció constant respecte a la bancada (II)

Una força d'aquestes característiques es pot aplicar amb una barra articulada en el punt d'accionament que mantingui la seva orientació respecte a la bancada.

Així doncs:

- i) Modelitzeu el mecanisme, de moment sense actuator i un sistema auxiliar format per dos sòlids, barra i suport, i dos parells prismàtics.
- ii) Articuleu la barra en el punt on voleu aplicar la força. Definiu un parell prismàtic entre el suport i la barra, i un altre entre el suport i la bancada; d'aquesta manera, es garanteix el moviment de translació de la barra i la seva orientació queda definida per la dels dos parells prismàtics. La barra només pot fer força a l'articulació en la direcció perpendicular a la guia fixa a la bancada (com posa en evidència el fet que la suma de forces exteriors al sistema auxiliar en la direcció de la guia fixa a la bancada ha de ser nul·la).
- iii) Definiu un actuator lineal entre la barra i el suport (actuator interior al sistema auxiliar perquè així la suma de forces exteriors a aquest en la direcció de la guia fixa a la bancada sigui nul·la) de tal manera que el punt d'aplicació de la força tingui el moviment desitjat.
- iv) Demaneu la força d'enllaç a l'articulació, que serà en la direcció perpendicular a la guia de la bancada.

Procureu utilitzar actuadors amb llargada definida sempre positiva; en cas contrari, la situació de la corredora no queda determinada.

## 8 Com aplicar, en general, una força d'accionament exterior en un model

Una força d'accionament exterior es pot aplicar, en un model, com força d'un actuador lineal directament aplicat o com força d'enllaç amb l'exterior. En els apartats anteriors s'han presentat diversos exemples.

- i) Si s'utilitza directament un actuador lineal, un dels seus d'ancoratge és, òbviament, el punt d'accionament del mecanisme; l'altre pot ser un punt de la bancada, un punt controlat externament (no previst en la versió actual del programa PAM) o un punt d'un mecanisme auxiliar o del mecanisme en estudi que es mogui en funció d'algun actuador aplicat directament. Si el mecanisme auxiliar té algun enllaç amb el mecanisme en estudi, no l'ha de pertorbar ni cinemàticament (no ha de modificar la seva mobilitat) ni dinàmicament (no ha d'introduir-li forces i per tant com a mínim ha de ser d'inèrcia negligible), la qual cosa només es pot obtenir en alguns casos particulars.
- ii) Si l'accionament es vol fer aplicant una força d'enllaç, cal també definir un mecanisme auxiliar que es mogui de manera controlada externament i/o en funció del mecanisme en estudi. El mecanisme auxiliar no ha de pertorbar la cinemàtica del mecanisme en estudi (no ha de modificar la seva mobilitat) i només ha d'introduir-li la força de les característiques previstes; en general serà d'inèrcia negligible i governat per un actuador que farà moure el conjunt dels dos mecanismes, el d'estudi i l'auxiliar.

El Mètode de les Potències Virtuals, com s'ha vist, pot ser de gran ajut. Cal, però, tenir present la variació de les accions d'enllaç quan es modelitza el sistema amb actuadors diferents.

## 9 Com determinar la trajectòria d'un punt d'un sòlid a la referència d'estudi (I)

El PAM utilitza com a coordenades generalitzades les coordenades de l'origen dels triedres locals, fixos a cadascun dels sòlids, respecte a un triedre global, fix a la referència d'estudi.

Així doncs:

- i) Situeu l'origen del triedre local del sòlid en el punt d'interès i feu l'anàlisi corresponent.
- ii) Demaneu les coordenades de l'origen del triedre.

## 10 Com determinar la trajectòria d'un punt d'un sòlid a la referència d'estudi (II)

El PAM utilitza com a coordenades generalitzades les coordenades de l'origen dels triedres locals, fixos a cadascun dels sòlids, respecte a un triedre global, fix a la referència d'estudi. Si el punt d'interès no és l'origen del triedre local del sòlid i no és senzill refer la definició del sistema perquè ho sigui, definiu un sòlid auxiliar per facilitar la tasca.

Així doncs:

- i) Si el punt d'interès ja està definit en el sòlid, definiu el sòlid auxiliar amb un sol punt situat a l'origen del seu triedre local.
- ii) Fixeu els dos sòlids amb una articulació entre ells, situada al punt d'interès i a l'origen del triedre local del sòlid auxiliar, i un actuador angular que mantingui la seva orientació relativa constant.
- iii) Demaneu les coordenades de l'origen del triedre del sòlid auxiliar.

o

- i') Si el punt d'interès no està definit en el sòlid i no és convenient fer-ho per no modificar la representació gràfica esquemàtica (que uneix els punts per ordre de definició) o altres raons, seleccioneu un dels punts definits del sòlid i definiu un sòlid auxiliar amb dos punts, un situat a l'origen del seu triedre local i l'altre a una distància d'aquest igual a la distància entre el punt seleccionat i el punt d'interès.
- ii) Fixeu els dos sòlids amb una articulació entre ells, situada al punt seleccionat i al segon punt del sòlid auxiliar, i un actuador angular que mantingui la seva orientació relativa constant, de manera que l'origen del triedre local del sòlid auxiliar coincideixi amb el punt d'interès.
- iii) Demaneu les coordenades de l'origen del triedre del sòlid auxiliar.

Podeu emprar altres recursos per fixar el sòlid al qual pertany el punt d'interès i el sòlid auxiliar: un actuador lineal, un enllaç piu-guia o altres solucions menys evidents, però si no és en situacions especials no seran tan còmodes de definir.

Tot i disposar de la segona solució cal tenir en compte que es pot definir un nou punt sense modificar la representació gràfica bàsica simplement continuant la llista de punts, de manera que la nova línia se superposi a la primitiva fins que vagi a parar al punt d'interès. Aleshores, ja es pot procedir com en el primer cas, amb l'avantatge estètic que el punt d'interès queda unit al sòlid i indicat amb el símbol d'articulació.

#### 11 Com determinar la trajectòria d'un punt d'un sòlid relativa a un altre sòlid

El PAM utilitza com a coordenades generalitzades les coordenades de l'origen dels triedres locals, fixos a cadascun dels sòlids, respecte a un triedre global, fix a la referència d'estudi i permet fixar a aquesta referència qualsevol dels sòlids de la cadena cinemàtica. Així doncs per determinar una trajectòria respecte a un sòlid només cal fixar-lo a la referència d'estudi i procedir com en els casos anteriors.

#### 12 Com determinar el centre instantani de rotació, cir, d'un sòlid (I)

En mecanismes senzills d'un grau de llibertat, el cir d'un sòlid sovint es pot trobar a partir de la intersecció de dues rectes de dos sòlids diferents. Si és aquest el cas la posició del cir es pot visualitzar amb l'ajut d'un sòlid auxiliar addicional.

Així doncs:

- i) Definiu un sòlid, dos enllaços piu-guia i un actuador addicionals. El sòlid addicional amb un únic punt situat a l'origen del triedre.
- ii) Situeu les guies dels enllaços piu-guia segons les rectes definidores del cir i el piu en el punt del sòlid auxiliar per als dos enllaços. Utilitzeu l'actuador per controlar el grau de llibertat restant del sòlid auxiliar; per exemple, feu-lo angular i fixeu l'orientació respecte a la referència d'estudi.
- iii) Demaneu les coordenades de l'origen del triedre del sòlid auxiliar.

Si exporteu els resultats i dibuixeu les successives posicions del cir tindreu la ruleta fixa del sòlid.

### 13 Com determinar el centre instantani de rotació, cir, d'un sòlid (II)

Hi ha mecanismes on la determinació del cir no és tan evident com en el cas anterior o la cadena cinemàtica té més d'un grau de llibertat i per tant no és possible determinar-lo només a partir de consideracions geomètriques; és a dir cal conèixer l'evolució temporal dels actuadors. En aquests casos, el PAM no us pot proporcionar directament el cir buscat però el podeu trobar amb els resultats que ell obté i l'ajut, per exemple, d'un full de càlcul.

Així doncs:

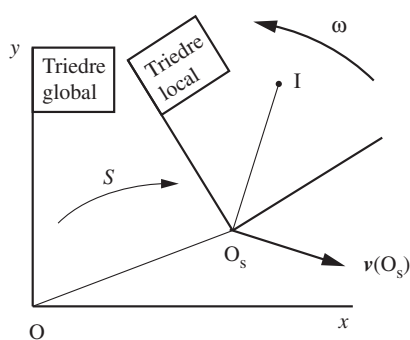
- i) Feu la simulació cinemàtica o cinetostàtica corresponent i exporteu les coordenades generalitzades del sòlid (posició de l'origen de triedre local -x, y- i orientació -fi-) i les seves derivades (Dx, Dy i Dfi).
- ii) Utilitzant les propietats del cir (Teoria de Màquines pàg.72) plantegeu una taula en el full de càlcul per calcular la posició del cir amb les expressions:  
 $x_{cir} = x - Dy / Dfi$      $y_{cir} = y + Dx / Dfi$

Si dibuixeu les successives posicions del cir tindreu la ruleta fixa del sòlid, expressada en el triedre global, fix a la referència d'estudi.

Si aprofitant els resultats exportats voleu trobar la ruleta mòbil en el triedre global:

- iii) Elegiu en quina configuració del sòlid voleu dibuixar la seva ruleta mòbil -x0, y0, fi0.
- iv) Utilitzant els resultats de la demostració adjunta plantegeu una taula en el full de càlcul per calcular la posició dels punts de la ruleta mòbil amb les expressions:  
 $x'_{cir} = x_0 + (-Dy \cos(fi-fi_0) + Dx \sin(fi-fi_0)) / Dfi$   
 $y'_{cir} = y_0 + (Dx \cos(fi-fi_0) + Dy \sin(fi-fi_0)) / Dfi$

#### Demostració



La posició de I en el triedre local és

$$\{O_s I\}_{local} = \omega^{-1} R_{90^\circ} S \{v(O_s)\}_{global}$$

Aquest vector, calculat per a les diferents configuracions del sòlid, defineix la seva ruleta mòbil en el triedre local ( $R_{90^\circ}$  és la matriu que gira  $90^\circ$  en sentit positiu).

Si aquesta ruleta es vol representar en el triedre global quan el sòlid està en una determinada configuració - $x_0, y_0, \varphi_0$ - cal aplicar-li la translació i la rotació corresponents, la qual cosa porta a l'expressió

$$\{OI\}_{global} = \{OO_s\}_{global} + \omega^{-1} S_0^{-1} R_{90^\circ} S \{v(O_s)\}_{global} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \omega^{-1} \begin{Bmatrix} -\dot{y} \cos(\varphi - \varphi_0) + \dot{x} \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \dot{x} \cos(\varphi - \varphi_0) + \dot{y} \sin(\varphi - \varphi_0) \end{Bmatrix}$$



14 Com determinar el centre instantani de rotació relatiu, cir relatiu, d'un sòlid respecte a un altre.

El PAM permet fixar a la referència d'estudi qualsevol dels sòlids de la cadena cinemàtica. Així doncs, per determinar el cir d'un sòlid (i la seva ruleta) respecte a un altre sòlid de la cadena cinemàtica només cal fixar el segon a la referència d'estudi i procedir com en el casos anteriors.

15 Com definir una llei de desplaçament cicloïdal per a un actuator lineal

La llei de desplaçament cicloïdal s'utilitza sovint per definir un canvi de posició de repòs (velocitat i acceleració inicial i final nul·les). Si el canvi de posició és  $h$  en un temps  $t_0$ :

$$s = h \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( 2\pi \frac{t}{t_0} \right) \right]$$

Es poden utilitzar actuadors en sèrie per obtenir lleis de desplaçament que siguin suma de les lleis definibles directament en el PAM. En aquest cas, són necessaris dos actuadors, un de funció polinòmica i un de funció harmònica. Els extrems dels actuadors estan ancorats a sòlids i per tant cal definir un sòlid auxiliar que uneixi els dos actuadors i garanteixi la seva colinealitat.

Així doncs:

- i) Definiu un sòlid, dos enllaços piu-guia addicionals i dos actuadors. Situeu un punt i una recta que passi per aquest punt del sòlid addicional i definiu els parells piu-guia de manera que la guia sigui la recta del sòlid addicional i els pius els ancoratges de l'actuator global.
- ii) Encoreu un actuator parcial entre el 1r ancoratge de actuator global i el punt del sòlid auxiliar, i l'altre actuator parcial entre aquest punt i el segon ancoratge de l'actuator global.

Si calen més actuadors parcials per definir la llei de desplaçament global cal definir més sòlids auxiliars, amb un punt i una recta cadascun, que facin de corredores de la guia definida per la recta del sòlid auxiliar anterior. Aquests nous sòlids serviran per ancorar adequadament la resta d'actuadors parcials.

Utilitzar més d'un actuator de funció polinòmica en sèrie no presenta cap utilitat ja que la suma de polinomis de grau  $n$  és un polinomi de grau  $n$ . Ara bé, utilitzar més d'un actuator de funció harmònica en sèrie permet, evidentment, definir funcions més complexes, per exemple funcions periòdiques amb diversos harmònics.

Si cal fer l'anàlisi dinàmica els sòlids addicionals han de ser d'inèrcia negligible per no modificar el comportament dinàmic del sistema.

16 Com definir una llei de desplaçament cicloïdal per a un actuator angular

Per obtenir una llei de desplaçament angular cicloïdal es pot procedir de manera semblant al cas anterior utilitzant actuadors angulars en sèrie i sòlids auxiliars.

Així doncs:

- i) Definiu un sòlid amb un punt i una articulació addicionals i dos actuadors. Articuleu aquest sòlid on us sigui més còmode, únicament cal que només tingui

- ii) Encoreu un actuador parcial entre el primer ancoratge de l'actuador global i el sòlid addicional, i l'altre actuador parcial entre aquest sòlid i el segon ancoratge de l'actuador global.

Si calen més actuadors parcials per definir la llei de desplaçament global cal definir de la mateixa manera més sòlids auxiliars que serviran per ancorar adequadament actuadors parcials.

### 17 Com trobar la inèrcia d'un mecanisme reduïda a una coordenada

La versió diferencial del teorema de l'energia (vegeu Teoria de Màquines Capítol 9) permet escriure:

$$F_{\text{red.}}(q) = m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}m_q(q)\dot{q}^2$$

Si el mecanisme s'acciona amb un actuador que imposa directament l'evolució de la coordenada i sobre ell no actua cap altra força, la força reduïda és directament el moment que realitza l'actuador si aquest és angular o la força que fa si és lineal i té la direcció de la coordenada.

Si s'imposa a l'actuador

$$\ddot{q} = 0, \quad \dot{q} = v \quad m_q(q) = 2F_{\text{red.}}(q)/v^2$$

$$\ddot{q} = a, \quad \dot{q} = 0, \quad q = 0 \quad m(0) = F_{\text{red.}}(0)/a$$

A partir d'aquestes expressions la inèrcia reduïda es pot determinar com

$$m(q) = \frac{F_{\text{red.}}(0)}{a} + \int_0^q \frac{2F_{\text{red.}}(q)}{v^2} dq$$

Aquesta integral es pot resoldre numèricament, en una primera aproximació, fent

$$m_i(q) = \frac{F_{\text{red.}}(0)}{a} + \left( \sum_{i=1}^n \frac{2F_{\text{red.},i}(q)}{v^2} \right) v \Delta t \quad \text{on } \Delta t \text{ és l'interval de temps pres a la simulació.}$$

Aleshores, si es pren  $v = 1$  i  $a = 1$ , en les unitats correctes, s'obté l'expressió numèrica

$$m_i(q) = F_{\text{red.}}(0) + \left( \sum_{i=1}^n 2F_{\text{red.},i}(q) \right) \Delta t$$

Així doncs:

- i) Definiu el model del mecanisme amb un actuador que imposi directament l'evolució de la coordenada i sense cap altra força. Definiu per a l'actuador  $\ddot{q} = 0$ ,  $\dot{q} = v$ , feu la simulació durant el temps adequat i guardeu en un fitxer el resultat (la coordenada i la força o moment de l'actuador).
- ii) Amb el mateix model, calculeu ara només el primer instant amb  $\ddot{q} = a$ ,  $\dot{q} = 0$  i guardeu la força o moment de l'actuador per a aquest instant.
- iii) En un full de càlcul resoleu la integral proposada.

El mètode proposat és una alternativa més eficient que procedir per suma de l'energia cinètica de tots els sòlids del mecanisme.

### 18 Com ...