



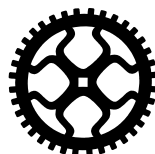
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

# Vibracions Mecàniques

**Exàmens Curs 2016-2017**

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

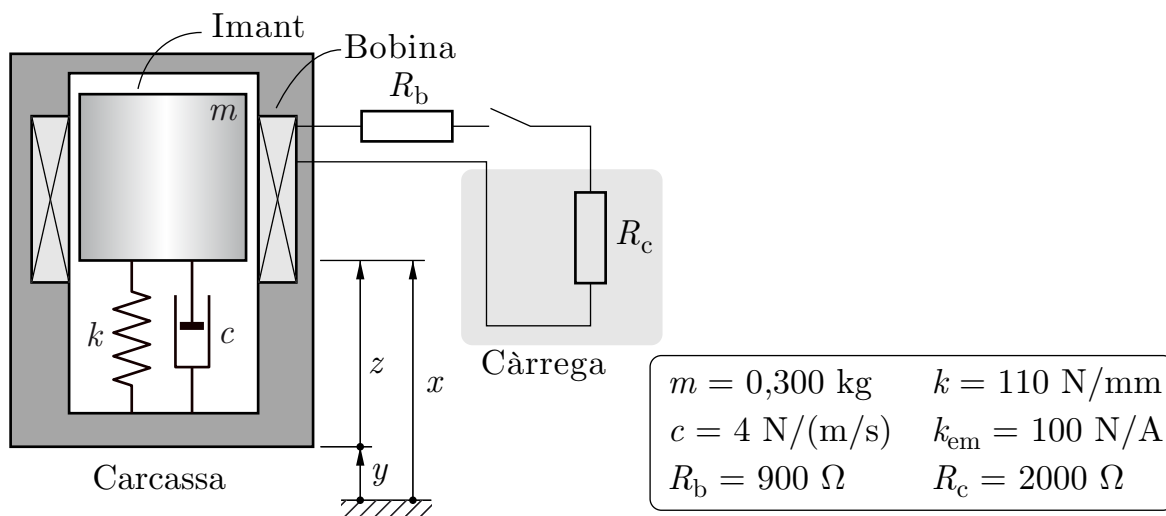


Departament d'Enginyeria Mecànica



- Contingut del sobre: enunciat, 2 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- És pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.

### Exercici



La possibilitat de disposar de sensors, electrònica, xarxa sense fils... de reduïdes dimensions i baix consum ha obert el camp de l'aprofitament de l'energia de fenòmens físics ambientals per al funcionament d'aquests elements i així evitar l'ús de piles i connexions físiques. Els artefactes previstos per captar l'energia ambiental s'anomenen recol·lectors –harvesters en la literatura anglesa.

Una de les fonts d'energia ambiental més atractiva en el món de les màquines –generadors, trens...– és la que es pot obtenir de les vibracions que elles mateixes generen i que es pot utilitzar per alimentar els sensors emprats en la monitorització del seu estat de funcionament.

A la figura es mostra l'esquema d'un recol·lector electromagnètic que consta de: i) una carcassa, la seva base és fixa a la superfície del cos que vibra; ii) un imant unit elàsticament a la carcassa; iii) una bobina fixa a la carcassa. El moviment relatiu de l'imant respecte a la bobina fa que el camp magnètic que la travessa variï i per tant s'indueixi en ella una tensió que pot generar un corrent en el circuit al qual està connectada –càrrega del recol·lector.

La interacció electromecànica entre la bobina i l'imant es pot descriure amb les expressions:  $u = k_{em} v$ ;  $F = k_{em} i$ , essent  $k_{em}$  la constant d'acoblament,  $u$  la tensió induïda a la bobina,  $v$  la velocitat relativa imant-bobina,  $F$  la força sobre la bobina i  $i$  la intensitat que circula per la bobina.

L'acceleració de la superfície on es col·loca el recol·lector és periòdica de freqüència  $f_{ex} = 50$  Hz i té dos harmònics: el fonamental de valor eficaç  $\ddot{y}_{ef1} = 0,5$  m/s<sup>2</sup> i el segon harmònic de valor eficaç  $\ddot{y}_{ef2} = 1,2$  m/s<sup>2</sup>.

Si el circuit de la bobina està obert –no circula corrent i per tant la bobina no fa força a l'imant– determineu:

- a) La freqüència pròpia  $f_0$  i la raó d'esmoreïment  $\zeta$  del sistema.
- b) El valor eficaç de la velocitat absoluta  $\dot{x}_{ef}$  de l'imant.
- c) La funció de resposta harmònica  $\mathbf{FTR} = \mathbf{Z}/\mathbf{Y}$  prenent com a entrada el moviment de la base  $y(t)$  i com a sortida el moviment relatiu  $z(t)$ .
- d) El valor eficaç de la velocitat relativa  $\dot{z}_{ef}$  de l'imant.

És usual en molta bibliografia negligir la inductància de la bobina i només considerar la seva resistència  $R_b$  i la de la càrrega  $R_c$ . Amb aquesta hipòtesi, determineu quan es tanca el circuit de la bobina:

- e) L'expressió de la força que actua sobre l'imant a causa de la interacció electromecànica en funció de la velocitat relativa  $\dot{z}$ . Noteu que es comporta com la força d'un amortidor.
- f) Els nous paràmetres vibratoris  $f_0$  i  $\zeta$  del sistema.
- g) La potència mitjana absorbida pel recol·lector i la potència mitjana cedida a la càrrega. La potència mitjana dissipada per un amortidor de constant  $c$  en funció de la velocitat relativa entre els seus extrems  $\dot{z}$  és  $P_c = c \dot{z}_{ef}^2$ .

### **Additional**

- h) La resistència de càrrega òptima per maximitzar la potència que rep.
- i) La potència absorbida pel recol·lector i la potència cedida a la càrrega si el moviment de la base és aleatori i es descriu mitjançant la densitat espectral de potència de la seva acceleració  $DSP_{\ddot{y}}$ .

## Solució Exercici

a) La freqüència pròpia  $f_0$  i la raó d'esmoreïment  $\zeta$  d'un sistema massa-molla-amortidor són:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 96,37 \text{ Hz} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0,0110$$

b) El moviment de l'imant és el de la massa d'un sistema excitat per la base, –o excitat sísmicament. Per a una excitació harmònica i règim estacionari, la relació entre l'amplitud del moviment de la base –entrada del sistema– i l'amplitud del moviment de la massa –sortida del sistema– ve donada pel factor de transmissió  $FT$ . Aquest factor és aplicable tant a l'amplitud com al valor eficaç i tant al desplaçament, com a la velocitat i a l'acceleració.

$$FT(\rho, \zeta) = \frac{\dot{x}_{\text{ef}}}{\dot{y}_{\text{ef}}} = \left( \frac{1 + (2\zeta\rho)^2}{(1 - \rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2} \right)^{1/2} \quad \text{amb} \quad \rho = \frac{f_{\text{ex}}}{f_0}$$

Per a cadascun dels harmònics del moviment de la base es té:

$$\dot{x}_{\text{ef1}} = FT\left(\frac{f_{\text{ex}}}{f_0}, \zeta\right) \dot{y}_{\text{ef1}} = FT\left(\frac{f_{\text{ex}}}{f_0}, \zeta\right) \frac{\ddot{y}_{\text{ef1}}}{(2\pi f_{\text{ex}})} = 2,178 \text{ mm/s}$$
$$\dot{x}_{\text{ef2}} = FT\left(\frac{2f_{\text{ex}}}{f_0}, \zeta\right) \dot{y}_{\text{ef2}} = FT\left(\frac{2f_{\text{ex}}}{f_0}, \zeta\right) \frac{\ddot{y}_{\text{ef2}}}{(2\pi 2f_{\text{ex}})} = 23,87 \text{ mm/s}$$

El valor eficaç de la superposició dels dos harmònics és

$$\dot{x}_{\text{ef}} = \left( \dot{x}_{\text{ef1}}^2 + \dot{x}_{\text{ef2}}^2 \right)^{1/2} = 23,98 \text{ mm/s}$$

Si no es coneix l'expressió del factor de transmissió  $FT$ , o no se'n disposa, es pot obtenir com a mòdul de la funció de resposta harmònica  $FT = \mathbf{X}/\mathbf{Y}$  prenent com a entrada el moviment de la base  $y(t)$  i com a sortida el moviment de l'imant  $x(t)$ . La funció de resposta harmònica es determina a partir de la transformada de Fourier de l'equació del moviment de l'imant.

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \quad \rightarrow \quad \left( m(\omega j)^2 + c(\omega j) + k \right) \mathbf{X} = \left( c(\omega j) + k \right) \mathbf{Y}$$



$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \frac{c(\omega j) + k}{m(\omega j)^2 + c(\omega j) + k} \rightarrow FT = \left| \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} \right| = \frac{x_p}{y_p} = \frac{x_{ef}}{y_{ef}} \quad [1]$$

$$\frac{\ddot{\mathbf{X}}}{\ddot{\mathbf{Y}}} = \frac{\dot{\mathbf{X}} \cdot (\omega j)}{\dot{\mathbf{Y}} \cdot (\omega j)} = \frac{\mathbf{X} \cdot (\omega j)^2}{\mathbf{Y} \cdot (\omega j)^2}$$

c) La funció de resposta harmònica  $FTR = \mathbf{Z}/\mathbf{Y}$  prenent com a entrada el moviment de la base  $y(t)$  i com a sortida el moviment relatiu  $z(t)$  es determina a partir de les expressions [1] de l'apartat anterior.

$$z = x - y \rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

$$FTR = \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} - 1 = \frac{-m(\omega j)^2}{m(\omega j)^2 + c(\omega j) + k}$$

$$FTR(\rho, \zeta) = \left| \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Y}} \right| = \frac{z_p}{y_p} = \frac{z_{ef}}{y_{ef}} = \left( \frac{\rho^4}{(1 - \rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2} \right)^{1/2}$$

d) El valor eficaç de la velocitat relativa  $\dot{z}_{ef}$  de l'imant es determina de la mateixa manera que el de la velocitat absoluta però fent ús del  $FTR$ .

Per a cadascun dels harmònics del moviment de la base es té:

$$\dot{z}_{ef1} = FTR \left( \frac{f_{ex}}{f_0}, \zeta \right) \dot{y}_{ef1} = FTR \left( \frac{f_{ex}}{f_0}, \zeta \right) \frac{\dot{y}_{ef1}}{(2\pi f_{ex})} = 0,5861 \text{ mm/s} \quad [2]$$

$$\dot{z}_{ef2} = FTR \left( \frac{2f_{ex}}{f_0}, \zeta \right) \dot{y}_{ef2} = FTR \left( \frac{2f_{ex}}{f_0}, \zeta \right) \frac{\dot{y}_{ef2}}{(2\pi 2f_{ex})} = 25,70 \text{ mm/s}$$

El valor eficaç de la superposició dels dos harmònics és

$$\dot{z}_{ef} = \left( \dot{z}_{ef1}^2 + \dot{z}_{ef2}^2 \right)^{1/2} = 25,71 \text{ mm/s}$$

e) L'expressió de la força que actua sobre l'imant a causa de la interacció electromecànica en funció de la velocitat relativa  $\dot{z}$  es troba fent ús de les expressions donades a l'enunciat i tenint en compte que considerant el circuit de la bobina més la càrrega purament resistiu la relació entre la tensió i la intensitat que hi circula és  $u = iR$ .

$$F = k_{em} i = k_{em} \frac{u}{R_b + R_c} = k_{em} \frac{k_{em} v}{R_b + R_c} = \frac{k_{em}^2}{R_b + R_c} \dot{z}$$



Aquesta expressió posa de manifest que la força que actua sobre l'imant és proporcional a la velocitat relativa imant-bobina o el que és el mateix imant-carcassa i per tant des del punt de vista mecànic és equivalent a la força que fa un amortidor en paral·lel al de la suspensió. En l'amortidor de la suspensió es dissipa energia a causa de les seves resistències passives internes; la interacció electromecànica genera energia elèctrica que es dissipa en la resistència interna de la bobina i en la resistència de la càrrega. Des del punt de vista del Principi de Conservació de l'Energia el sistema massa-molla-amortidor: i) rep energia de l'exterior en forma de treball fet per la força que la base fa sobre el conjunt molla-amortidor, ii) cedeix energia a l'exterior –en principi en forma de calor– a causa de les resistències passives de l'amortidor i en forma de treball fet per la força que fa a la bobina, iii) en estat estacionari no acumula energia interna ja que l'energia cinètica de la massa i l'energia potencial de la molla en mitjana es mantenen.

f) D'acord amb el resultat de l'apartat anterior, tancar l'interruptor equival –des del punt de vista mecànic– a disposar d'un amortidor equivalent de constant

$$c_{\text{total}} = c + c_e \quad \text{amb} \quad c_e = \frac{k_{\text{em}}^2}{R_b + R_c}$$

En resum, com que només varia l'amortidor la freqüència pròpia es manté i la raó d'esmoreïment passa a ser

$$\zeta_{\text{total}} = \frac{c_{\text{total}}}{2\sqrt{km}} = 0,02050$$

g) Tal com s'ha dit a l'apartat *e* en règim estacionari l'energia mitjana acumulada pel sistema massa-molla-amortidor és nul·la. Això fa que la potència mitjana rebuda –absorbida pel recol·lector– és igual a la potència mitjana dissipada per l'amortidor equivalent. Alternativament, si es pren com a sistema el conjunt massa-molla-amortidor més la bobina i la càrrega la potència mitjana rebuda és igual a la potència mitjana dissipada per les resistències passives de l'amortidor més les resistències elèctriques del circuit.

$$P_{\text{absorbida}} = c_{\text{total}} \dot{z}_{\text{ef}}^2$$

$$P_{\text{absorbida}} = c \dot{z}_{\text{ef}}^2 + i_{\text{ef}}^2 (R_b + R_c) = c \dot{z}_{\text{ef}}^2 + \frac{u_{\text{ef}}^2}{(R_b + R_c)} = c \dot{z}_{\text{ef}}^2 + \frac{k_{\text{em}}^2}{(R_b + R_c)} \dot{z}_{\text{ef}}^2$$



Tal com s'ha vist a l'apartat anterior, en tancar el circuit s'ha modificat la raó d'esmoreïment; per tant cal tornar a calcular la velocitat relativa emprant les expressions [2] de l'apartat d.

$$\dot{z}_{ef} = \left( \dot{z}_{ef1}^2 + \dot{z}_{ef2}^2 \right)^{1/2} = \left( 0,5859^2 + 23,45^2 \right)^{1/2} = 23,45 \text{ mm/s}$$

$$P_{\text{absorbida}} = c_{\text{total}} \dot{z}_{ef}^2 = 4,095 \text{ mW}$$

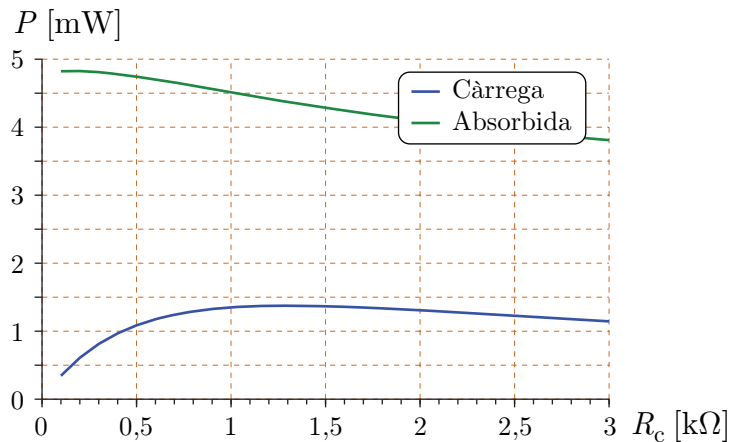
La potència cedida pel recol·lector a la càrrega és la potència que es dissipa a la resistència d'aquesta, que és una part de la potència elèctrica generada.

$$P_{\text{càrrega}} = i_{ef}^2 R_c = \frac{u_{ef}^2}{(R_b + R_c)^2} R_c = \frac{k_{em}^2 \dot{z}_{ef}^2}{(R_b + R_c)^2} R_c = \frac{R_c}{(R_b + R_c)} \frac{k_{em}^2 \dot{z}_{ef}^2}{(R_b + R_c)} =$$

$$\frac{R_c}{(R_b + R_c)} P_{\text{elèctrica}} = 1,307 \text{ mW}$$

- h) Per trobar la resistència de càrrega òptima per maximitzar la potència que rep es proposa dibuixar la potència que dissipa en funció del seu valor. Cal doncs aplicar reiteradament el procediment de l'apartat anterior.

En el gràfic de la figura adjunta es mostra la potència mitjana absorbida pel recol·lector i la potència mitjana cedida a la càrrega. S'observa un màxim de potència cedida a l'entorn de  $R_c = 1300 \Omega$ .



- i) Si el moviment de la base es descriu mitjançant la densitat espectral de potència de la seva acceleració  $DSP_{\ddot{y}}$  per aplicar els procediments dels apartats anteriors cal tenir en compte les relacions següents.

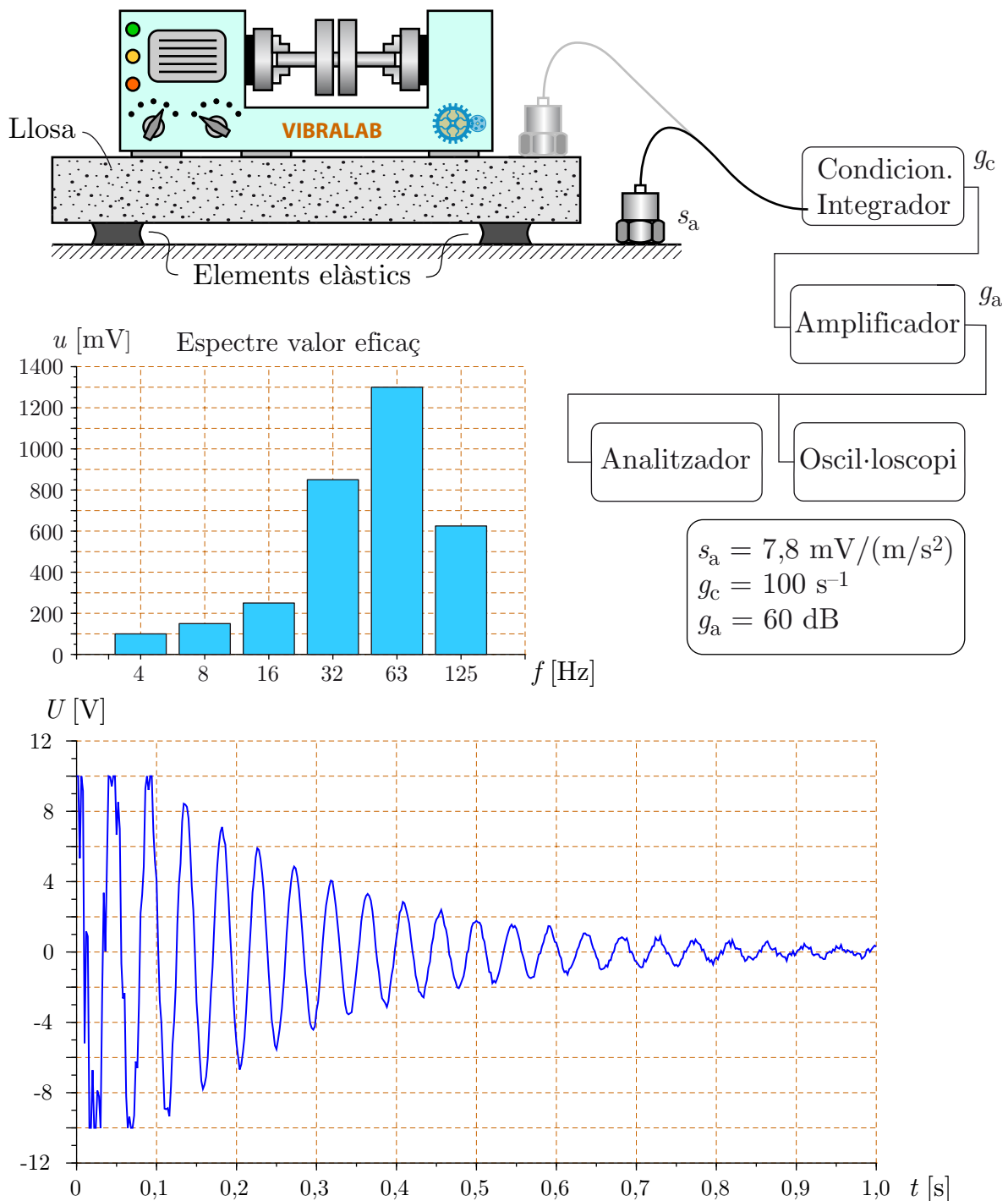
$$\dot{z}_{ef}^2 = \int DSP_{\dot{z}} df$$

$$DSP_{\dot{z}} = FTR^2 \cdot DSP_{\ddot{y}} = FTR^2 \frac{1}{2\pi f} DSP_{\ddot{y}}$$





- Contingut del sobre: Enunciat, 2 fulls quadriculats i 1 full en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja.**
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original.**
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.



Cal instal·lar un instrument de metrologia en un local amb un nivell de vibració lleugerament perceptible a causa d'un taller de mecanitzat proper. Segons les especificacions del manual de l'instrument, per tal que l'exactitud –veracitat més precisió– sigui la nominal cal que el nivell de vibració en la banda de freqüències  $3 \text{ Hz} \leq f \leq 180 \text{ Hz}$  de l'emplaçament on se situï no superi la velocitat eficaç  $v_{\text{ef max}} = 0,5 \text{ mm/s}$ .

Per tal de mesurar les vibracions es disposa d'un equip que consta de:

- Acceleròmetre. Sensibilitat:  $s_a = 7,8 \text{ mV}/(\text{m/s}^2)$
- Condicionador-integrador. Guany:  $g_c = 100 \text{ s}^{-1}$
- Amplificador. Guany:  $0 \text{ dB} \leq g_a \leq 100 \text{ dB}$  amb salts de  $10 \text{ dB}$ . Sortida màxima:  $U_{\text{max}} = \pm 10 \text{ V}$ .
- Oscil·loscopi i analitzador d'espectres en bandes d'octava.

Inicialment es va mesurar el nivell de vibració i amb un guany de  $60 \text{ dB}$  a l'amplificador es va obtenir l'espectre en valor eficaç de la velocitat de vibració i bandes d'octava de la figura.

a) Determineu el valor eficaç de la vibració i compareu-lo amb el màxim permès i expresseu la diferència en  $\text{dB}$ .

A fi de reduir la vibració en els peus de l'instrument de metrologia es va decidir muntar-lo sobre una llosa recolzada elàsticament sobre el terra. Per tal de valorar la bondat de l'aïllament elàstic un cop realitzat, es col·loca l'acceleròmetre sobre la llosa, es dona una forta percussió vertical a la llosa i s'obté el registre temporal de la figura.

b) Comenteu i analitzeu de manera justificada els trets més rellevants del gràfic temporal de la velocitat obtingut.

c) Determineu la freqüència pròpia  $f_0$  i la raó d'esmoreïment  $\zeta$  de l'aïllament elàstic. Arrodoniu la freqüència a les unitats i la raó d'esmoreïment a la centèsima, justifiqueu-ho.

d) Determineu el nivell de vibració de la llosa en condicions de funcionament nominal i compareu-lo amb el màxim permès i expresseu la diferència en  $\text{dB}$ . Comenteu el resultat.

## Solució

a) La sensibilitat  $s$  i el factor d'escala  $fe$  de l'equip de mesura són:

$$s = s_a \cdot g_c \cdot g_a = 7,8 \frac{\text{mV}}{\text{m/s}^2} \cdot 100 \text{ s}^{-1} \cdot 10^{60/20} = 780 \text{ mV}/(\text{mm/s}) \rightarrow$$

$$fe = \frac{1}{s} = 1,282 \cdot 10^{-3} (\text{mm/s})/\text{mV}$$

El valor eficaç de la velocitat de vibració mesurada s'obté com l'arrel quadrada de la suma dels quadrats dels valors eficaços de la velocitat de vibració de totes les bandes de l'espectre. Aquests valors eficaços es llegeixen del gràfic de l'espectre  $u_{\text{ef},i}$  en mV i posteriorment es converteixen a mm/s fent ús del factor d'escala. També es pot trobar primer el valor eficaç total dels valors llegits i posteriorment aplicar el factor d'escala a aquest valor.

Freq.[Hz]	4	8	16	32	63	125
$u_{\text{ef},i}$ [mV]	100	150	250	850	1300	625
$v_{\text{ef}}$ [mm/s]	0,1282	0,1923	0,3205	1,0897	1,6667	0,8013

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\sum_i v_{\text{ef},i}^2} = \sqrt{\sum_i (u_{\text{ef},i} fe)^2} = \left( \sqrt{\sum_i u_{\text{ef},i}^2} \right) fe = 2,183 \text{ mm/s}$$

La diferència en dB amb el màxim permès és

$$\Delta \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef}}}{v_{\text{ref}}} - 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef,max}}}{v_{\text{ref}}} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef}}}{v_{\text{ef,max}}} = 12,8 \text{ dB}.$$

Els nivells de vibració en dB referits a  $v_{\text{ref}} = 10^{-6} \text{ mm/s}$  són:

$$v_{\text{ef,max}} \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef,max}}}{v_{\text{ref}}} = 114,0 \text{ dB}$$

$$v_{\text{ef}} \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef}}}{v_{\text{ref}}} = 126,8 \text{ dB}$$

b) En el gràfic temporal de la figura s'observa:

- Saturació en els primers pics. Causada pel fet que el senyal que s'enregistra supera el màxim de sortida de l'amplificador, que és  $U_{\text{max}} = \pm 10 \text{ V}$ .



- Un soroll d'alta freqüència superposat als primers pics. Aquest soroll probablement és causat per la percussió donada a la llosa, que a més d'excitar el seu moviment vertical excita també altres modes de vibració de freqüència elevada.
  - Un soroll més o menys aleatori que es fa més aparent a mesura que el senyal es fa més petit. Aquest soroll és atribuïble a la vibració del terra que es trameta a la llosa a través dels elements elàstics de suport.
- c) Es proposa arrodonir la freqüència a les unitats i la raó d'esmoreïment a la centèsima ja que el registre de la vibració lliure, d'on s'obtenen aquests valors, posa de manifest la presència d'un soroll no negligible i per altra banda el gràfic del registre té una resolució limitada i s'analitza amb eines limitades.

Per observació directa del nombre de cicles en un tram del gràfic on el soroll és prou inferior al senyal, per exemple entre el 3r i el 13è cicles, s'obté la freqüència d'oscil·lació  $f_d = 22$  Hz.

Per obtenir la raó d'esmoreïment primer cal determinar el decrement logarítmic  $\delta$ . Per fer-ho cal prescindir del tram on es produeix la saturació, ja que en aquest tram els valors dels màxims i mínims del senyal estan condicionats per la saturació, i també del tram on el soroll és notable comparat amb el senyal. Igual que per a la freqüència es pot fer un estimació entre el 3r i el 13è cicles i es té:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_{m+n}}{x_m} \quad \rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = 0,03$$

A partir de la freqüència d'oscil·lació i de la raó d'esmoreïment la freqüència pròpia és:

$$f_0 = f_d / \sqrt{1 - \zeta^2} = 22 \text{ Hz}$$

- d) Per calcular el nivell de vibració de la llosa en condicions de funcionament nominal cal determinar la vibració del terra que se li transmet a través dels elements elàstics. Es considera que la vibració del terra no depèn de la presència de la llosa i que la transmissió de la vibració del terra a la llosa queda prou ben descrita pel factor de transmissió  $FT = v_{\text{llosa}}/v_{\text{terra}}$ . El factor de transmissió per a cada banda d'octava es calcula per a la seva freqüència central  $f_{ei}$ .



$$FT = \frac{\left(1 + (2\zeta\rho)^2\right)^{1/2}}{\left(\left(1 - \rho^2\right)^2 + (2\zeta\rho)^2\right)^{1/2}}$$

$$\rho = \frac{f_e}{f_0} \quad \begin{array}{l} \text{Freqüència d'excitació} \\ \text{Freqüència pròpia} \end{array}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} \quad \text{Raó d'esmoreïment}$$

Freq.[Hz]	4	8	16	32	63	125
$v_{\text{ef}}$ [mm/s]	0,1282	0,1923	0,3205	1,0897	1,6667	0,8013
$FT$	1,034	1,152	2,116	0,8970	0,1409	0,0338
$v_{\text{ef. llosa}}$ [mm/s]	0,1326	0,2216	0,6781	0,9775	0,2348	0,0271

$$v_{\text{ef. llosa}} = \sqrt{\sum_i v_{\text{ef. llosa. } i}^2} = 1,240 \text{ mm/s}$$

De manera semblant a la de l'apartat *a*, es pot aplicar el  $FT$  als valors llegits de l'espectre, trobar-ne el valor eficaç total i posteriorment aplicar el factor d'escala a aquest valor.

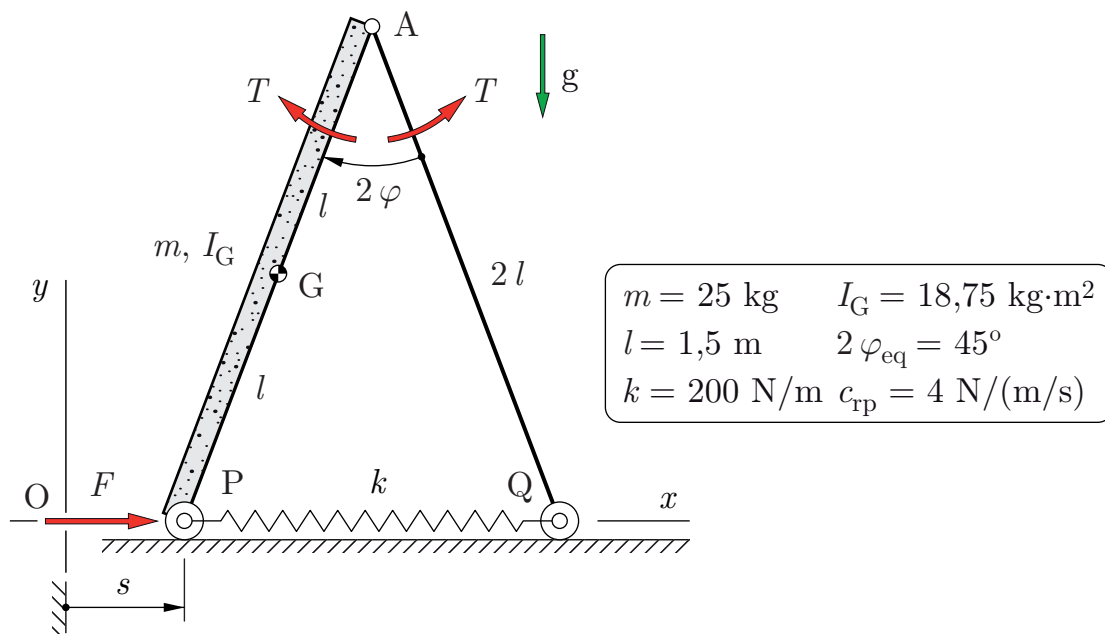
La diferència en dB del nivell de vibració de la llosa amb el màxim permès és

$$\Delta \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{ef. llosa}}}{v_{\text{ef. max}}} = 7,9 \text{ dB}$$

S'observa que el nivell de vibració aconseguit a la llosa és encara superior al màxim permès. La banda de 16 Hz és amplificada per l'aïllament i la banda de 32 Hz, la de major nivell, és molt poc atenuada. Per complir les especificacions caldria disminuir la freqüència pròpia de l'aïllament.



- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar l'examen es disposa d'una hora per al test i de dues hores per al problema.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'un full A4 manuscrit original.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.



A la figura es mostra un suport articulat a A que limita la seva obertura  $2\varphi$  mitjançant una corda elàstica PQ de constant  $k$ . Els peus P i Q del suport recolzen a terra mitjançant rodetes de radi negligible que rodolen sense lliscar respecte a terra. El suport se suposa de massa negligible i la seva càrrega, situada a la part esquerra, es representa per la barra homogènia AP, de massa  $m$  i moment central d'inèrcia  $I_G$ . Les resistències passives, causades en gran part pel rodolament de les rodetes, es consideren viscoses de constant  $c_{\text{rp}}$  reduïdes a la velocitat de cadascun dels peus.

Considerem la rodeta del peu P fixa, el peu Q lliure i nul el parell  $T$  a l'articulació A i determineu:

- a) L'expressió de l'energia cinètica  $E_c$  i de l'energia potencial  $E_p$  del sistema.
- b) La llargada sense tensió  $l_0$  de la corda PQ per tal que l'obertura del suport en equilibri sigui  $2\varphi = 45^\circ$ .
- c) La freqüència pròpia  $f_0$  i la raó d'esmoreïment  $\zeta$  del sistema amb la corda de l'apartat anterior.

Considerem ara els dos peus lliures, prenem com a vector de coordenades generalitzades  $\mathbf{q} = \{s, \varphi\}^T$  i determineu:

- d) Les matrius d'inèrcia  $\mathbf{M}$ , de rigidesa  $\mathbf{K}$  i d'esmoreïment  $\mathbf{C}$ .
- e) Les freqüències pròpies  $f_{0i}$  i els modes propis  $\mathbf{p}_i$ . Interpreteu els resultats.
- f) L'esmoreïment dels modes propis  $\zeta_i$ . Interpreteu els resultats.

Anomenem  $\mathbf{H}_{ij}$  les components de la matriu de resposta harmònica  $\mathbf{H}$  si es pren com a excitació  $\mathbf{e} = \{F, 2T\}^T$  essent  $F$  la força horitzontal al peu P i  $T$  el parell a l'articulació A i com a sortida el moviment descrit amb el vector  $\mathbf{q}$ . Determineu:

- g) L'expressió del desplaçament alternatiu del peu P si se li aplica una força  $F$  alternativa que es pot expressar com  $F(t) = F_p \cos(2\pi f_e t)$ .

Addicional:

- h) Trobeu els valors numèrics de l'amplitud i la fase del moviment alternatiu del peu P si  $f_e = 2$  Hz i  $F_p = 9$  N.
- i) Dibuixeu el mòdul de les components de la matriu de resposta freqüencial. Interpreteu els resultats.
- j) Estudieu l'acoblament dels modes a causa de l'esmoreïment.

## Solució

a) Amb el peu Q lliure i la rodeta del peu P fixa el sistema té un únic grau de llibertat que es pot associar, per exemple, a la variació d'obertura del suport definida per  $2\dot{\varphi}$ . La càrrega gira al voltant de P fix amb velocitat angular  $\dot{\varphi}$ . El centre d'inèrcia G de la càrrega es considera sobre la recta AP tal com se suggereix a la proposta de l'enunciat. Així doncs l'energia cinètica del sistema  $E_c$  és:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (m l^2 + I_G) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_{\text{red}} \dot{\varphi}^2 \quad [1]$$

L'energia potencial  $E_p$  és l'energia potencial associada al pes més l'associada a la rigidesa de la corda elàstica. Per a la primera es pren l'origen quan G està sobre l'horitzontal,  $\varphi = 90^\circ$ , i per a la segona es pren l'origen quan la corda de llargada  $l_0$  està distesa.

$$E_p = E_{p\text{pes}} + E_{p\text{molla}} = m g l \cos \varphi + \frac{1}{2} k (4l \sin \varphi - l_0)^2 \quad [2]$$

b) La determinació de la llargada sense tensió  $l_0$  de la corda per tal que el suport estigui en equilibri en una certa obertura requereix plantejar la condició d'equilibri en aquesta configuració, que es pot fer a partir de l'energia potencial del sistema. En ella la derivada de l'energia potencial és nul·la ja que totes les forces amb potència associada no nul·la són conservatives o s'anul·len per a velocitat nul·la (les resistències passives es consideren viscoses).

$$\left. \frac{dE_p}{d\varphi} \right|_{\varphi_{\text{eq}}} = -m g l \sin \varphi_{\text{eq}} + k (4l \sin \varphi_{\text{eq}} - l_0) 4l \cos \varphi_{\text{eq}} = 0$$

$$l_0 = 4l \sin \varphi_{\text{eq}} - \frac{m g}{4k} \tan \varphi_{\text{eq}} = 2,169 \text{ m}$$

Alternativament la condició d'equilibri es pot trobar plantejant els teoremes vectorials en aquesta configuració. Per fer-ho cal tenir en compte que la barra AQ és un sòlid auxiliar d'enllaç, se suposa de massa negligible, amb articulacions en els seus extrems i per tant fa força en la direcció de la recta que les uneix.

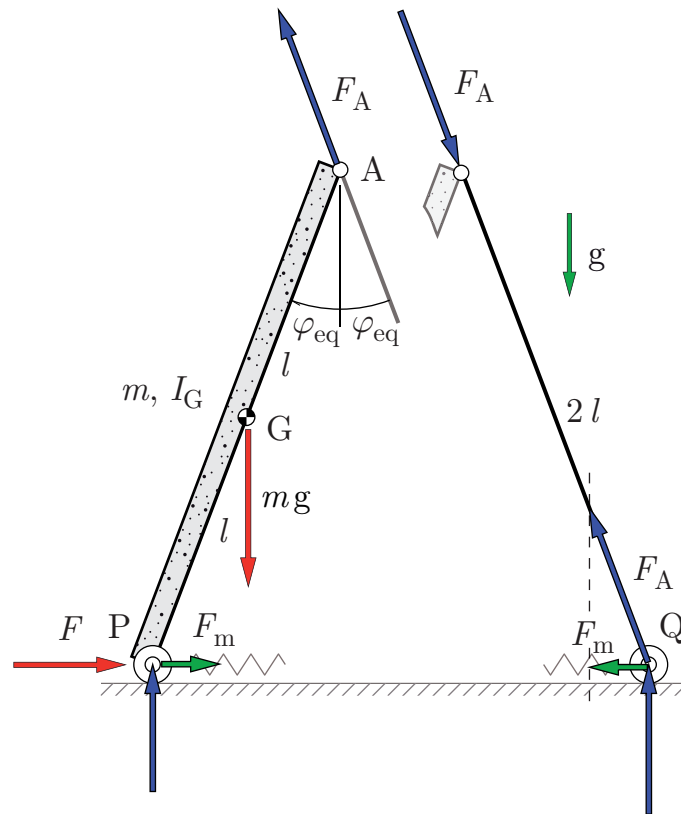
$$\sum_{\text{càrrega}} \mathbf{M}_{\text{ext}}(P) \Big|_3 = 0 \quad \rightarrow \quad -m g l \sin \varphi_{\text{eq}} + F_A 2l \sin 2\varphi_{\text{eq}} = 0$$

$$F_A = \frac{m g l \sin \varphi_{\text{eq}}}{2l \sin 2\varphi_{\text{eq}}} ; \quad F_m = F_A \sin \varphi_{\text{eq}} = \frac{m g l \sin^2 \varphi_{\text{eq}}}{2l \sin 2\varphi_{\text{eq}}} = \frac{m g}{4} \tan \varphi_{\text{eq}}$$





$$F_m = k(4l \sin \varphi_{eq} - l_0)$$



c) La freqüència pròpia  $f_0$  de les petites oscil·lacions a l'entorn d'una configuració d'equilibri estable d'un sistema d'un grau de llibertat en el qual totes les forces amb potència associada no nul·la són conservatives o s'anul·len per a velocitat nul·la, ve donada per l'expressió següent:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{red}}{m_{red eq}}} \text{ essent } m_{red eq} \text{ la inèrcia reduïda en la configuració d'equilibri,}$$

que s'obté per identificació directa de l'expressió de l'energia cinètica en la configuració d'equilibri i  $k_{red}$

$$k_{red} = \left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_{eq}} = -mgl \cos \varphi_{eq} + k 4l \cos \varphi_{eq} 4l \cos \varphi_{eq} - k(4l \sin \varphi_{eq} - l_0) 4l \sin \varphi_{eq} = -mgl \cos \varphi_{eq} + 16kl^2 \cos 2\varphi_{eq} + 4kl l_0 \sin \varphi_{eq}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{red}}{I_{red}}} = 1,393 \text{ Hz}$$



La raó d'escorament és  $\zeta = c_{\text{red}} / \left( 2\sqrt{k_{\text{red}} m_{\text{red eq}}} \right)$ . L'escorament reduït  $c_{\text{red}}$  d'un sistema d'un grau de llibertat a l'entorn d'una posició d'equilibri es determina a partir de la potència de les forces no conservatives  $P_{\text{nc}}$ .

$$c_{\text{red}} = - \left. \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{P_{\text{nc}}}{\dot{q}} \right) \right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}, \dot{q}=0}$$

En el sistema que s'estudia les forces no conservatives són les resistències passives, que es consideren viscoses de constant  $c_{\text{rp}}$  reduïdes a la velocitat de cadascun dels peus, en aquest cas només del peu Q.

$$P_{\text{nc}} = - (c_{\text{rp}} v_{\text{Q}}) v_{\text{Q}} = -c_{\text{rp}} v_{\text{Q}}^2 = -c_{\text{rp}} (4l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 \rightarrow c_{\text{red}} = c_{\text{rp}} (4l \cos \varphi_{\text{eq}})^2$$

$$\zeta = 0,0936$$

d) Al tenir ara els dos peus lliures el sistema passa a tenir dos graus de llibertat que es poden associar a les coordenades indicades  $\mathbf{q} = \{s, \varphi\}^T$ .

Les matrius  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  es determinen a partir de les expressions de l'energia cinètica  $E_c$  i de l'energia potencial  $E_p$ .

$$\overline{\text{OG}} = \begin{Bmatrix} s + l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{Bmatrix} \rightarrow v_{\text{G}} = \begin{Bmatrix} \dot{s} + l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ -l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{G}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{G}} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi}) + \frac{1}{2} I_{\text{G}} \dot{\varphi}^2 =$$

$$\frac{1}{2} (m l^2 + I_{\text{G}}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m 2l \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \quad [3]$$

L'energia potencial no depèn d' $s$  així doncs es manté l'expressió [2].

Per observació directa de l'energia cinètica i recordant que

$$E_c|_{\mathbf{q}_e} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \text{ s'obté}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & m l \cos \varphi_{\text{eq}} \\ m l \cos \varphi_{\text{eq}} & I_{\text{G}} + m l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 34,65 \\ 34,65 & 75 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI}$$

$$\text{Els elements de la matriu de rigidesa } \mathbf{K} \text{ són: } k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}}$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{red}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5747 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI}$$

La matriu d'esmoreïment  $\mathbf{C}$  s'obté de l'expressió de la potència de les forces no conservatives,  $P_{\text{nc}} = \sum_i Q_i \dot{q}_i$  on  $Q_i$  és la força generalitzada associada a la coordenada  $q_i$  i  $c_{ij} = -\partial Q_i / \partial \dot{q}_j \Big|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}, \dot{\mathbf{q}}=0}$ . Cal tenir present que les forces no conservatives amb potència no nul·la poden ser funció de velocitat i per tant  $Q_i$  pot ser funció de  $\dot{q}_i$ . Per evitar confusions pot ser adequat no explicitar la formulació de les forces funció de velocitat fins haver determinat les forces generalitzades. En el cas estudiat la potència de les forces no conservatives  $P_{\text{nc}}$  és la potència de les resistències passives, que tal com s'ha dit, es consideren viscoses de constant  $c_{\text{rp}}$  i reduïdes a la velocitat de cadascun del peus, les forces generalitzades són per tant funció de les velocitats  $\dot{s}$  i  $\dot{\varphi}$ .

$$P_{\text{nc}} = F_{\text{P}} \dot{s} + F_{\text{Q}} (\dot{s} + 4l \cos \varphi \dot{\varphi}) \quad \text{amb} \quad F_{\text{P}} = -c_{\text{rp}} \dot{s} \quad F_{\text{Q}} = -c_{\text{rp}} (\dot{s} + 4l \cos \varphi \dot{\varphi})$$

$$Q_s = F_{\text{P}} + F_{\text{Q}} \quad Q_{\varphi} = F_{\text{Q}} 4l \cos \varphi$$

$$Q_s = -c_{\text{rp}} (2\dot{s} + 4l \cos \varphi \dot{\varphi}) \quad Q_{\varphi} = -c_{\text{rp}} (\dot{s} + 4l \cos \varphi \dot{\varphi}) 4l \cos \varphi$$

$$\mathbf{C} = c_{\text{rp}} \begin{bmatrix} 2 & 4l \cos \varphi_{\text{eq}} \\ 4l \cos \varphi_{\text{eq}} & (4l \cos \varphi_{\text{eq}})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 22,17 \\ 22,17 & 122,9 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI} \quad [4]$$

Amb les matrius  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{C}$  l'equació matricial del moviment lliure del sistema linealitzat a l'entorn de la configuració d'equilibri és

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad [5]$$

e) Les freqüències pròpies  $f_{0i}$  i els modes propis  $\mathbf{p}_i$  s'obtenen diagonalitzant la matriu dinàmica  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . En funció dels valors propis  $\lambda_i$ , les freqüències pròpies són:  $f_{0i} = \sqrt{\lambda_i} / (2\pi)$ . La forma de vibrar associada al mode propi de freqüència pròpia  $f_{0i}$  queda descrita pel vector propi  $\mathbf{p}_i$  associat al valor propi  $\lambda_i$ .

$$\begin{aligned} f_{01} &= \sqrt{\lambda_1} / (2\pi) = 0 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \{1, 0\}^T \text{ Unitats SI} \\ f_{02} &= \sqrt{\lambda_2} / (2\pi) = 2,323 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_2 = \{0,8109, -0,5852\}^T \text{ Unitats SI} \end{aligned} \quad [6]$$



El sistema té un mode propi de mecanisme rígid, de freqüència pròpia nul·la, i un mode propi vibratori.

En el mode propi de mecanisme rígid el suport i la càrrega es desplacen a velocitat constant i mantenint l'obertura del suport constant.

El segon mode propi, mode propi vibratori, descriu un moviment harmònic de freqüència 2,323 Hz en el qual quan el peu P es mou cap a la dreta l'obertura del suport disminueix. La proporció de amplituds dels dos moviments és: si el peu es mou 0,8109 mm l'obertura  $2\varphi$  disminueix  $2 \cdot 0,5852 \text{ mrad} = 0,06705^\circ$ .

f) Si es pren la matriu  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$ , que té per columnes els vectors propis de la matriu dinàmica  $\mathbf{D}$ , i a l'equació matricial del moviment [5] es fa el canvi a coordenades modals,  $\mathbf{q} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}$ , i es premultiplica per  $\mathbf{P}^T$ , s'obté:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad [7]$$

Les matrius  $\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$  i  $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$  són diagonals.

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9,241 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI}$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1968 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI}$$

La matriu  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$  només és diagonal en casos particulars com en el d'esmoreïment proporcional o esmoreïment de Rayleigh, on la matriu  $\mathbf{C}$  és una combinació lineal d' $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$ . En aquest cas

$$\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8 & 6,487 \\ 6,487 & 26,30 \end{bmatrix} \text{ Unitats SI}$$

Els termes diagonals de  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$  descriuen l'esmoreïment directament associat a cada coordenada modal  $\xi_i$ , i per tant a cada mode propi. Per a un mode propi de mecanisme rígid –de freqüència pròpia nul·la– la rigidesa associada al mode és nul·la, component (1, 1) de  $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ , i la raó d'esmoreïment es fa infinita. En definitiva, en aquest cas té poc sentit introduir la raó d'esmoreïment. Amb aquestes consideracions, la raó d'esmoreïment de cada mode és:

$$\zeta_i = \frac{\left(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}\right)_{ii}}{2 \sqrt{\left(\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}\right)_{ii} \left(\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}\right)_{ii}}} \rightarrow \begin{cases} \zeta_1 = \infty \\ \zeta_2 = 0,09753 \end{cases}$$



En un sistema lliure, els modes propis descriuen moviments que ni la inèrcia ni la rigidesa del sistema acoblen o fan dependents. Els termes no diagonals de  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$  són els causants de l'acoblament per esmorteïment dels modes propis. Usualment, en sistemes on no està especialment previst un esmorteïment intens, aquest i, en particular, l'acoblament que genera són febles.

El moviment dels modes propis no oscil·latoris a partir d'unes condicions inicials no nul·les decreix exponencialment segons el terme  $e^{-(c/m)t}$  tal com es pot comprovar analitzant l'equació del moviment lliure amb rigidesa nul·la  $-m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$  o  $m\dot{v} + cv = 0$ . Així doncs en aquest cas pot tenir sentit definir la constant de temps del mode com  $m/c$ .

g) Les equacions del moviment [5] corresponen al sistema lliure o autònom, sense accionaments, que originen forces o parells funció del temps. L'efecte d'aquests accionaments s'inclou en l'equació del moviment amb el vector d'excitació  $\mathbf{e}$  que s'obté de l'expressió de la potència de les forces o parells que generen.  $P_{\text{acc}} = \sum_i Q_{\text{acc } i} \dot{q}_i$  on  $Q_{\text{acc } i}$  és la força generalitzada dels accionaments associada a la coordenada  $q_i$  i és la component  $e_i$  del vector d'excitació. Si escau, igual que el cas de l'esmorteïment pot ser adequat no explicitar la formulació de les forces funció del temps fins haver determinat les forces generalitzades.

$$P_{\text{acc}} = F \dot{s} + 2T \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad Q_{\text{acc } s} = F \quad Q_{\text{acc } \varphi} = 2T$$

Amb el vector d'excitació donat, i també determinat en el paràgraf anterior,

$$\mathbf{e} = \{F, 2T\}^T \quad \text{l'equació matricial del moviment és}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{e} \quad [8]$$

La matriu de resposta harmònica  $\mathbf{H}(\omega)$ , prenent com a entrada el vector d'excitació  $\mathbf{e}$  i com a sortida el moviment descrit amb el vector  $\mathbf{q}$  s'obté fent la transformada de Fourier de l'equació matricial del moviment [8].

$$\begin{aligned} (-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{C} \omega \mathbf{j} + \mathbf{K}) \mathbf{Q} &= \mathbf{E} \\ \mathbf{Q} = \mathbf{H} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{H} = (-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{C} \omega \mathbf{j} + \mathbf{K})^{-1} \end{aligned}$$

Anomenant  $\mathbf{H}_{ij}$  les components de la matriu de resposta harmònica  $\mathbf{H}$ , la transformada de Fourier  $\mathbf{Q}_1$  del moviment alternatiu de P a causa de la component variable de la força  $F$  –excitació– és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H} \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_{11} F$$



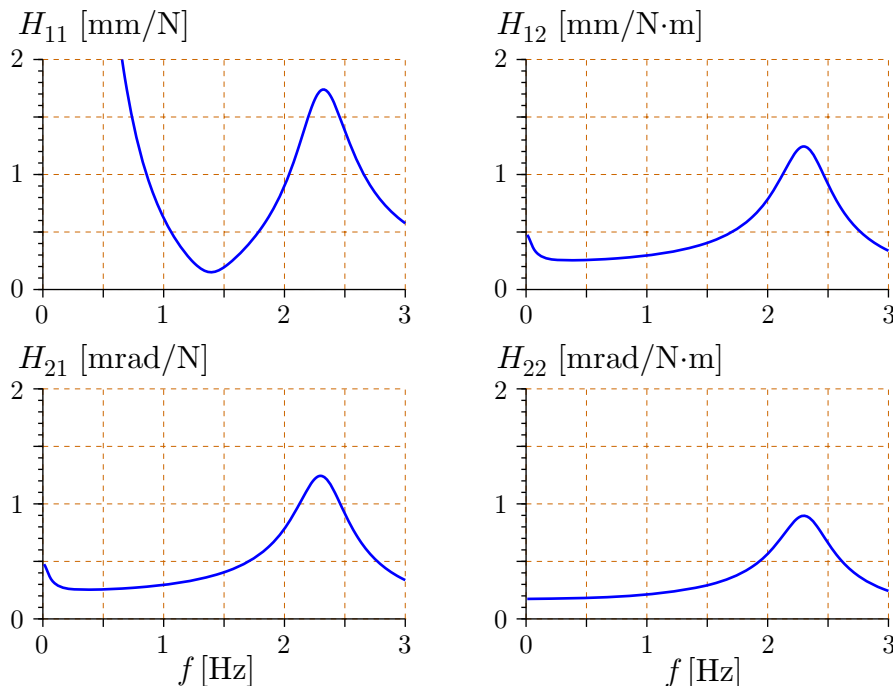
En règim estacionari el moviment alternatiu de P és: harmònic de la mateixa freqüència que l'excitació, d'amplitud igual a l'amplitud de l'excitació multiplicada pel mòdul de la resposta harmònica a la freqüència d'excitació i desfasada respecte a l'excitació un angle igual a l'argument de la resposta harmònica per a la freqüència d'excitació. En resum

$$s(t) = \left| \mathbf{H}_{11}(2\pi f_e) \right| F_p \cos \left( 2\pi f_e t + \arg \left[ \mathbf{H}_{11}(2\pi f_e) \right] \right) \quad [9]$$

h) L'expressió [9] per a  $f_3 = 2 \text{ Hz}$  i  $F_p = 9 \text{ N}$  és

$$s(t) = 8,108 \cos \left( 2\pi f_e t - 45,85^\circ \right) \text{ mm}$$

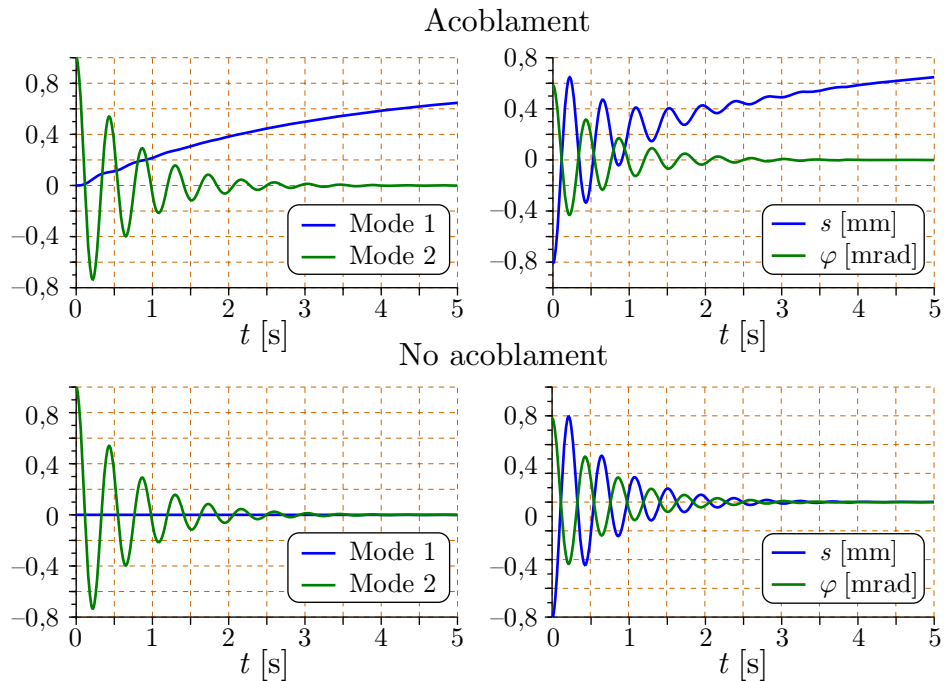
i) A la figura adjunta es mostren els mòduls de les respostes harmòniques  $H_{ij}$ . En els gràfics es poden observar els màxims a l'entorn de la freqüència pròpia del mode propi vibratori. Aquests màxims posen de manifest la major resposta del sistema a l'entorn de les freqüències pròpies o de ressonància.  $H_{11}$  tendeix a infinit quan  $f$  tendeix a 0, aquest fet és consistent amb el fet que si s'aplica una força constant a P el sistema es va desplaçant per petita que aquesta sigui, ja que les resistències passives s'han pres viscoses, proporcionals a la velocitat.



j) Per tal d'estudiar l'acoblament causat per l'esmoreïment s'ha integrat l'equació del moviment en coordenades pròpies [7] dues vegades, amb la matriu  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$  completa i anul·lant els seus termes no diagonals. S'han pres com a condicions inicials  $\xi = \{0, 1\}^T$ ,  $\dot{\xi} = \{0, 0\}^T$ , corresponents a iniciar el moviment únicament del mode propi vibratori, desplaçant-lo de la posició de repòs i alliberant-lo amb



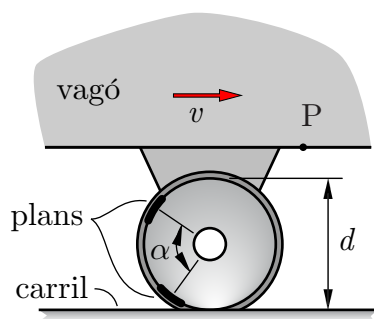
velocitat nul·la. Posteriorment s'ha passat de les coordenades pròpies a les coordenades geomètriques  $s$  i  $\varphi$ .



A la fila superior de la figura es mostra el resultat de la integració amb la matriu  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$  completa. S'observa que si bé inicialment el primer mode és d'amplitud nul·la, com correspon a les condicions inicials donades, aquesta va creixent amb el temps tendint a un valor asimptòtic. El mode propi vibratori tendeix a la configuració d'equilibri. Evidentment els dos modes tendeixen al repòs ja que les resistències passives dissipen l'energia subministrada amb les condicions inicials donades.

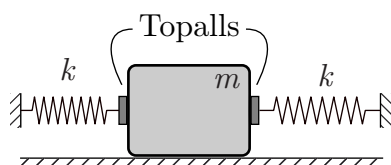
A la fila inferior es mostra el resultat de la integració anul·lant els termes no diagonals de la matriu  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$ . S'observa clarament que ara només té una evolució no nul·la el mode amb condicions inicials no nul·les.





**1** Una roda d'un vagó de tren té dues irregularitats –plans– importants en la seva superfície de rodament separades un angle  $\alpha$ . El diàmetre de les rodes és  $d = 800$  mm i la velocitat del tren és constant  $v = 75$  km/h. La vibració produïda per aquestes irregularitats en un punt  $P$  del terra del vagó és:

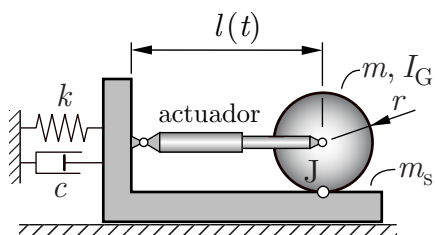
- A Periòdica de freqüència 4,14 Hz.
- B Periòdica de freqüència 8,29 Hz.
- C Periòdica de freqüència 16,58 Hz independent d' $\alpha$ .
- D Periòdica de freqüència 8,29 Hz si  $\alpha \neq 180^\circ$  i 16,58 Hz si  $\alpha = 180^\circ$ .



**2** En el sistema de la figura per evitar la pèrdua de contacte dels topalls amb el bloc en la configuració d'equilibri les molles estan comprimides amb una força  $T_0$ . La freqüència pròpia  $f_0$  del sistema és:

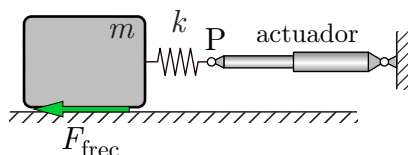
- A  $f_0 = \sqrt{k/(2m)}/(2\pi)$
- B  $\sqrt{k/(2m)}/(2\pi) < f_0 < \sqrt{2k/m}/(2\pi)$
- C  $f_0 = \sqrt{2k/m}/(2\pi)$
- D  $f_0 > \sqrt{2k/m}/(2\pi)$





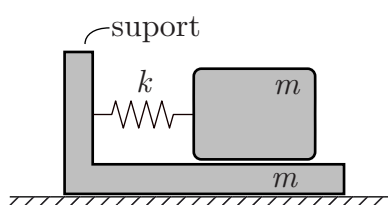
**3** En el sistema de la figura, la longitud de l'actuador varia de forma harmònica  $-l(t) = l_0 + l_p \cos(2\pi f_e t)$ . La freqüència de ressonància és:

- A  $\sqrt{k/m_s}/(2\pi)$  si el corró llisca a J.
- B  $f_e$
- C  $\sqrt{k/(m_s + m + I_G/r^2)}/(2\pi)$  si el corró no llisca a J.
- D  $\sqrt{k/(m_s + m)}/(2\pi)$



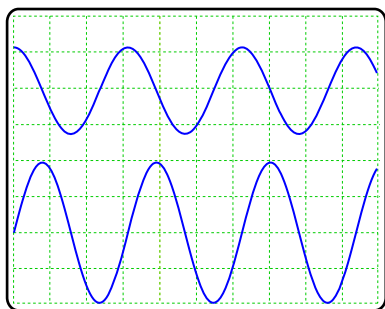
**4** L'extrem P de l'actuador de la figura té un moviment harmònic de baixa freqüència. A causa de les característiques de la força de frec  $F_{frec}$  el moviment del bloc és polsant –stick-slip en literatura anglesa. La vibració associada a aquest moviment polsant és:

- A Excitada
- B Paramètrica
- C Lliure
- D Autoexcitada



**5** En el sistema de la figura si el suport és fix la freqüència pròpia és  $f_0$ . Si s'allibera el suport la freqüència del mode propi vibratori del sistema és:

- A  $\sqrt{2} f_0$
- B  $f_0/\sqrt{2}$
- C  $2 f_0$
- D  $f_0/2$



**6** A la pantalla de l'oscil·loscopi de la figura es mostra la velocitat i l'acceleració d'un mateix punt però no es pot resseguir qui és qui. De l'anàlisi de les formes d'ona es pot deduir que:

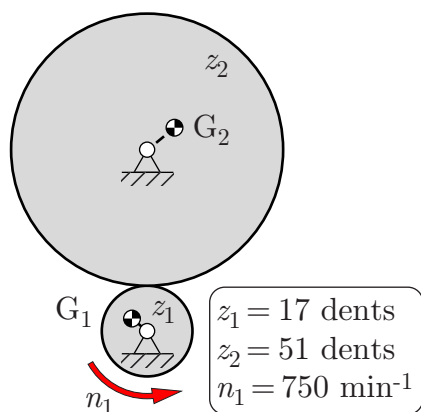
- A La superior és la velocitat i la inferior és l'acceleració, atenent a la fase relativa.
- B La superior és l'acceleració i la inferior és la velocitat, atenent a la fase relativa.
- C La superior és la velocitat i la inferior és l'acceleració, atenent a l'amplitud relativa.
- D La superior és l'acceleració i la inferior és la velocitat, atenent a l'amplitud relativa.

**7** El valor eficaç de la suma de dos senyals harmònics de la mateixa freqüència i d'amplituds  $x_{p1}$  i  $x_{p2}$  es pot garantir que és:

- A  $(x_{p1} + x_{p2})/\sqrt{2}$
- B  $\sqrt{(x_{p1}^2 + x_{p2}^2)}/\sqrt{2}$
- C  $\leq (x_{p1} + x_{p2})/\sqrt{2}$
- D  $\leq \sqrt{(x_{p1}^2 + x_{p2}^2)}/\sqrt{2}$

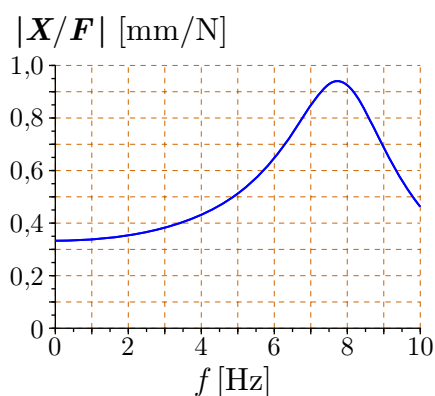
**8** En un taller es disposa de tres màquines. Individualment cadascuna genera en un mateix punt P un nivell de vibració de 94 dB. Si es posen les tres en marxa simultàniament, quin és el nivell de vibració màxim que es pot produir a P?

- A 97 dB
- B 100 dB
- C 103 dB
- D 98,8 dB



**9** La vibració que genera l'engranatge de la figura a causa del desequilibri de les dues rodes és de freqüència:

- A 4,2 Hz
- B 12,5 Hz
- C 20,8 Hz
- D 37,5 Hz



**10** A la figura es mostra el mòdul de la receptància  $-X/F$  d'un sistema d'un grau de llibertat. Les millors estimacions de la seva rigidesa  $k$  i de la seva massa  $m$  són:

- |   | $k$ [N/mm] | $m$ [kg] |
|---|------------|----------|
| A | 0,3        | 50,6     |
| B | 3,0        | 1,3      |
| C | 0,33       | 1,3      |
| D | 3,3        | 8,1      |

**COMPROVEU QUE COINCIDEIX EL NÚMERO DE LA PERMUTACIÓ DEL TEST AMB EL NÚMERO DEL FULL DE MARQUES ÒPTIQUES.**

**Full de respostes**

Vibracions Mecàniques

9 de juny de 2017

<b>P</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
1	B	B	D	A	B
2	C	A	B	D	D
3	D	C	C	C	A
4	D	C	B	B	C
5	A	B	A	A	D
6	B	A	A	B	B
7	C	A	C	D	D
8	D	C	D	C	A
9	A	D	D	A	B
10	B	D	B	C	C