Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

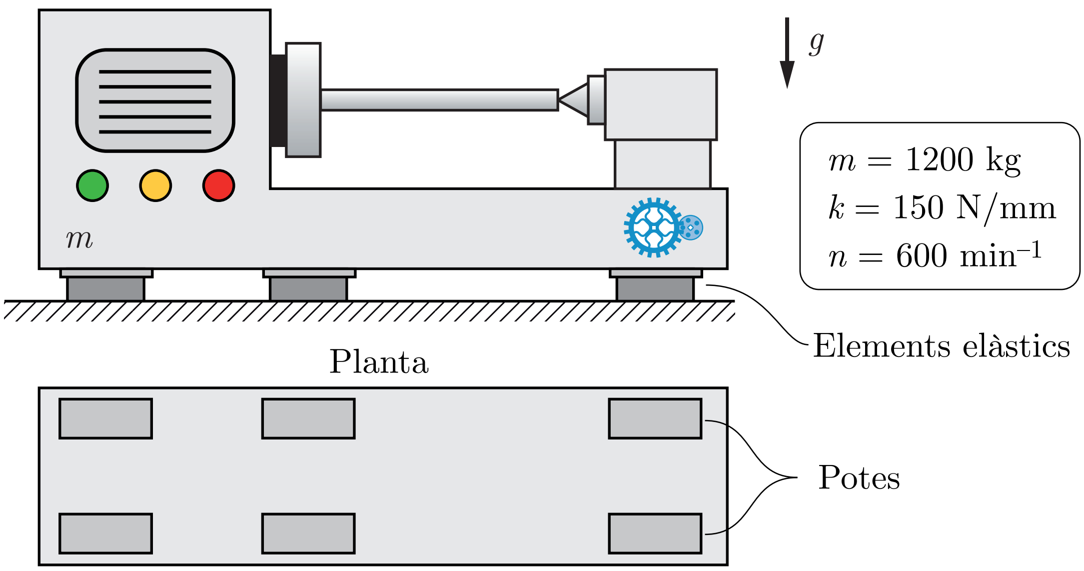
Exàmens Curs 2022-2023

Lluïsa Jordi

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: enunciat, 2 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els blancs en el sobre.

Exercici



La màquina de la figura transmetria a terra una força vertical $F_\mathrm{e}\ (t)$ de valor eficaç $F_\mathrm{e\ ef}$ si s'hi unís rígidament.

L'espectre freqüencial d'aquesta força presenta dos harmònics destacats de la freqüència de gir, el fonamental i el tercer harmònic. Les dades principals d'aquest espectre es mostren a la taula.

Harmònic	1	3
$F_{\mathrm{ep}i}$	F_{ep1}	$F_{\mathrm{ep1}}/2$

Es desitja dissenyar un aïllament per tal que el valor eficaç de la força transmesa a terra, $F_\mathrm{T\ ef}$, no superi el 10% del valor $F_\mathrm{e\ ef}$.

Els elements elàstics seleccionats es disposen sota les 6 potes de la màquina, situades de manera que la càrrega sobre elles és uniforme. Es suposa que són de comportament lineal de constant k i, si convé, es poden apilar.

Suposant que la màquina només té moviment vertical, determineu:

a) El valor de l'amplitud $F_{\mathrm{ep}i}$ de cada harmònic en funció del valor eficaç $F_{\mathrm{e\ ef}}$.

b) El valor eficaç de la força transmesa a terra amb l'aïllament, $F_{\mathrm{T\ ef}}$, en funció dels factors de transmissió i de $F_{\mathrm{e\ ef}}$.

c) El valor de la relació de freqüències ρ que fa complir la condició de disseny. Justifiqueu les hipòtesis realitzades.

d) El valor k_{t} de la rigidesa necessària del conjunt d'elements elàstics situats sota les potes de la màquina.

e) El nombre p d'elements elàstics necessaris.

f) La freqüència pròpia f_0 del moviment vertical de la màquina amb la solució adoptada.

g) Comproveu la bondat de la solució proposada.

Solució Exercici

a) El valor eficaç $F_{\text{e ef}}$ de $F_{\text{e}}\,(t)$ s'obté com:

$$F_{\text{e ef}} = \sqrt{\sum_i F_{\text{e ef}_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{e p1}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{F_{\text{e p3}}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{F_{\text{ep1}}^2}{2} + \frac{F_{\text{ep1}}^2}{2\cdot 4}} = F_{\text{e p1}}\sqrt{\frac{5}{8}}$$

Per tant, el valor de les amplituds del primer i tercer harmònic de $F_{\text{e}}\,(t)$ són:

$$F_{\text{e p1}} = \sqrt{\frac{8}{5}}\,F_{\text{e ef}} \quad \text{i} \quad F_{\text{e p3}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,F_{\text{e ef}}.$$

b) El valor eficaç $F_{\text{T ef}}$ s'obté com:

$$F_{\text{T ef}} = \sqrt{\sum_i F_{\text{T ef}_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{FT_1\,F_{\text{e p1}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{FT_3\,F_{\text{e p3}}}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Substituint $F_{\text{e p1}}$ i $F_{\text{e p3}}$ pels valors trobats a l'apartat anterior, s'obté:

$$F_{\text{T ef}} = \frac{F_{\text{e ef}}}{\sqrt{5}}\sqrt{4\,FT_1^2 + FT_3^2}.$$

c) La condició de disseny desitjada és que $F_{\text{T ef}} = 0{,}1 \cdot F_{\text{e ef}}$.

El factor de transmissió es defineix com $FT = \dfrac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}$.

En general, l'esmorteïment sol ser petit. Per tant, en primera aproximació es pren $\zeta = 0$. Si es desitja tenir aïllament cal que la raó de freqüències ρ sigui superior a $\sqrt{2}$. Amb aquestes consideracions el factor de transmissió, per a cada freqüència, es reescriu com:

$FT = \dfrac{1}{\rho^2 - 1}$. Es desitja que $F_{\text{T ef}}\,/\,F_{\text{e ef}} = 0{,}1$. Per tant, amb el resultat obtingut de l'apartat anterior, per obtenir el valor de ρ cal resoldre l'equació:

$0{,}1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\dfrac{4}{\left(\rho^2-1\right)^2} + \dfrac{1}{\left(9\rho^2-1\right)^2}}$. La solució d'aquesta equació és $\rho = 3{,}155$.

Tenint en compte que si l'aïllament es garanteix per a la freqüència més baixa també queda garantit per a la freqüència més elevada, es podria calcular el valor de ρ considerant només el primer harmònic. En aquest cas $\rho = 3{,}153$.

d) Tenint en compte el valor de ρ obtingut a l'apartat anterior es té:

$$\rho = \frac{f}{f_0} \quad \rightarrow \quad k_\mathrm{t} = \frac{f^2}{\rho^2}\, 4\,\pi^2\, m = 475{,}85 \ \mathrm{N/mm}.$$

En el cas de considerar només el primer harmònic, $k_\mathrm{t} = 476{,}39$ N/mm.

e) La rigidesa que han de proporcionar el conjunt d'elements elàstics ha de ser igual a k_t o inferior. Cal posar un mínim de 6 elements elàstics, un per a cada pota. Com que aquests elements estan col·locats en paral·lel proporcionen una rigidesa equivalent:

$k_\mathrm{eq} = 6 \cdot k = 900$ N/mm. Aquest valor és superior al necessari. Cal doncs disminuir-lo en un factor $k_\mathrm{eq} \,/\, k_\mathrm{t} = 1{,}89$.

Tenint en compte que els elements elàstics es poden apilar i amb el factor obtingut, es decideix posar dos elements en sèrie a cada pota. D'aquesta manera:

$k_\mathrm{eq} = 3 \cdot k = 450$ N/mm, valor que és inferior a k_t.

Finalment, el nombre p d'elements elàstics necessaris és 12.

f) La freqüència pròpia amb la solució adoptada és:

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_\mathrm{eq}}{m}} = 3{,}082 \ \mathrm{Hz}.$$

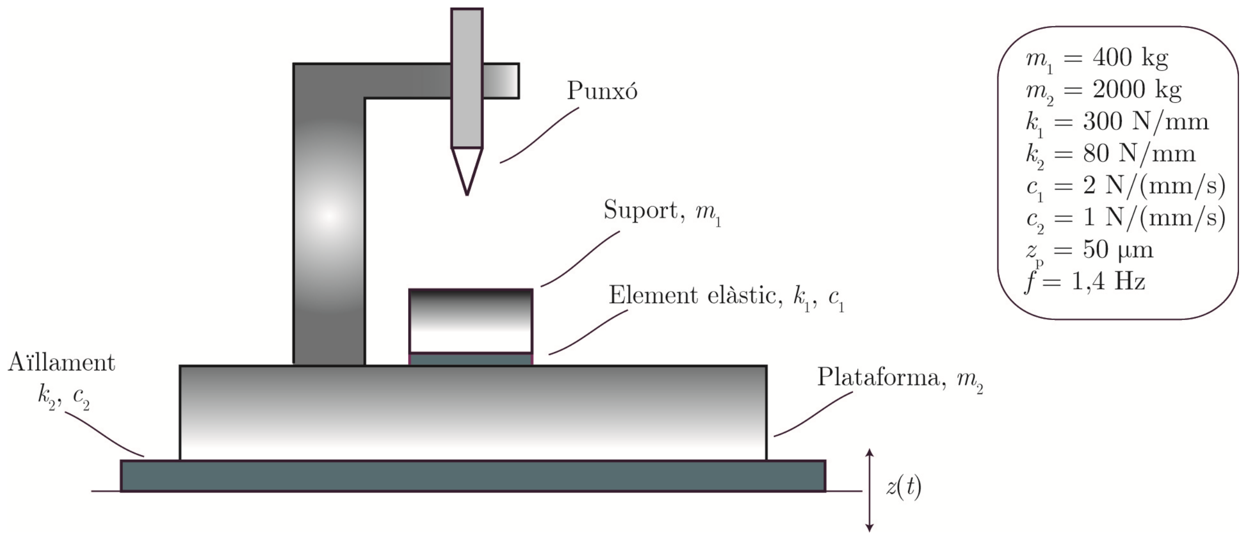
g) Per comprovar la bondat de la solució proposada es calcula la relació $F_{\mathrm{T\ ef}} \,/\, F_{\mathrm{e\ ef}}$ obtinguda:

$$\frac{F_{\mathrm{T\ ef}}}{F_{\mathrm{e\ ef}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{4}{\left(\rho^2-1\right)^2} + \frac{1}{\left(9\rho^2-1\right)^2}} = 0{,}09399.$$

Si només s'empra el primer harmònic el valor que s'obté és $F_{\mathrm{T\ ef}} \,/\, F_{\mathrm{e\ ef}} = 0{,}09387$.

Per tant, amb els resultats obtinguts s'observa que s'ha aconseguit un aïllament millor que el desitjat.

- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- La durada de l'examen és: **una hora per al test** i de **dues hores per al problema**.
- Material escrit: només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- Per entregar introduïu els fulls quadriculats i el material aprofitable en el sobre.



La figura mostra l'esquema d'una punxonadora que està sotmesa a una vibració provinent del terra a causa d'una màquina externa.

El suport, que en règim de funcionament haurà de suportar l'impacte causat pel punxonat, té una massa $m_1 = 400$ kg i està unit a la plataforma a través d'un element elàstic que es modelitza com una molla de rigidesa $k_1 = 300$ N/mm i un amortidor de constant $c_1 = 2$ N/(mm/s).

Per tal de dissenyar l'aïllament adequat entre la punxonadora i el terra, s'estudien les característiques de la màquina quan està fixada directament a terra i rep la vibració externa $z(t) = z_\mathrm{p} \cos(2\,\pi\, f\, t)$.

Suggeriment: feu un esquema de blocs per a cada situació que es planteja.

Anomeneu al moviment vertical del suport $\boldsymbol{x}_1$.

Determineu, amb la **plataforma fixada a terra**,

a) La freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmorteïment ζ del suport.

b) L'amplitud $\dot{x}_{1\text{p}1}$ de la velocitat que adquireix el suport en el règim estacionari, sense impactes, amb $z_\text{p} = 50$ µm i $f = 1{,}4$ Hz.

Per tal de reduir aquesta velocitat, es decideix col·locar entre la plataforma, de massa $m_2 = 2000$ kg, i el terra un aïllament elàstic de característiques $k_2 = 80$ N/mm i $c_2 = 1$ N/(mm/s).

Per a l'anàlisi vibratòria del sistema modificat entorn de la configuració d'equilibri, **anomeneu** al moviment vertical de la plataforma respecte al terra $\boldsymbol{x_2}$; així doncs, utilitzeu el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \left\{x_1, x_2\right\}^\text{T}$.

Determineu:

c) Les matrius d'inèrcia $\boldsymbol{M}$, de rigidesa $\boldsymbol{K}$ i d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$.

d) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$. Interpreteu els resultats.

e) L'esmorteïment dels modes propis ζ_i si es negligeix l'acoblament per esmorteïment.

f) L'expressió de la matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ si es pren com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$, que té per components els termes independents de les equacions del moviment, i com a sortida el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q}$.

g) L'amplitud de la velocitat relativa $\dot{x}_{1\text{p}} - \dot{x}_{2\text{p}}$ entre la velocitat del suport de la plataforma en el règim estacionari (sense impactes de la punxonadora), si es té en compte que la vibració externa és: $z(t) = z_\text{p} \cos(2\,\pi\, f\, t)$, amb $z_\text{p} = 50$ µm i $f = 1{,}4$ Hz.

h) Comenteu si s'ha aconseguit o no el propòsit de reduir l'amplitud de la velocitat de vibració del suport.

Solució

a) Amb la plataforma fixada a terra, el sistema té un únic grau de llibertat que correspon al moviment del suport respecte al terra. La freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment es determinen com:

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 4,359 \text{ Hz} \qquad \text{i} \qquad \zeta = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1\, m_1}} = 0,09129.$$

b) L'amplitud $\dot{x}_{1\text{p}1}$ de la velocitat que adquireix el suport en el règim estacionari, sense impactes, es pot determinar a partir de conèixer l'amplitud del desplaçament $x_{1\text{p}}$. El desplaçament $x_{1\text{p}}$ es pot determinar a partir del factor de transmissió que relaciona el moviment $x_{1\text{p}}$ en el règim estacionari amb el moviment del terra z_p.

$$x_\text{p} = z_\text{p}\frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_{1\text{p}} = z_\text{p}\left(2\,\pi\,f\right)\frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}$$

Substituint els valors numèrics s'obté: $\dot{x}_{1\text{p}1} = 0,4902$ mm/s.

c) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment es poden trobar, per exemple, a partir de les expressions de l'energia cinètica, de l'energia potencial i de la potència de les forces no conservatives.

Es pren com a vector de coordenades generalitzades, tal com suggereix l'enunciat, $\boldsymbol{q} = \left\{x_1,\, x_2\right\}^\text{T}$.

L'energia cinètica E_c del sistema és la suma de l'energia cinètica del suport més la de la plataforma.

$$E_\text{c} = E_{\text{c suport}} + E_{\text{c plataforma}} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 2000 \end{pmatrix} \text{kg}$$

Prenent l'origen de l'energia potencial E_p a la posició d'equilibri, l'energia potencial només és l'associada a les forces dels elements elàstics.

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}k_1\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\,x_2^2$$

Els elements de la matriu de rigidesa $\boldsymbol{K}$ són: $k_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 E_\mathrm{p}}{\partial q_i\, \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_\mathrm{eq}}$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & -300 \\ -300 & 380 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

La matriu d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$ s'obté de l'expressió de la potència de les forces no conservatives, $P_\mathrm{nc} = \sum_i Q_i\, \dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la coordenada q_i i $c_{ij} = -\partial Q_i / \partial \dot{q}_j \big|_{\boldsymbol{q}_\mathrm{eq}, \dot{\boldsymbol{q}}=0}$.En aquest cas:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N/(m/s)}$$

Alternativament, les matrius es poden trobar a partir de les equacions de moviment obtingudes, per exemple, aplicant el teorema de la quantitat de moviment al suport i a la plataforma.

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_2 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \left(c_1 + c_2\right) \dot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right) x_2 - k_1 x_1 = 0$$

Amb les matrius $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{C}$ l'equació matricial del moviment lliure a l'entorn de la configuració d'equilibri és

$$\boldsymbol{M}\, \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\, \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad [1]$$

d) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$ s'obtenen diagonalitzant la matriu dinàmica $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$. En funció dels valors propis λ_i, les freqüències pròpies són: $f_{0i} = \sqrt{\lambda_i} / (2\pi)$. La forma de vibrar associada al mode propi de freqüència pròpia f_{0i} queda descrita pel vector propi $\boldsymbol{p}_i$ associat al valor propi λ_i.

$$f_{01} = \sqrt{\lambda_1} / \left(2\,\pi\right) = 0{,}9154 \text{ Hz} \quad \rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \left\{1{,}046,\ 1\right\}^\mathrm{T} \text{ m}$$
$$f_{02} = \sqrt{\lambda_2} / \left(2\,\pi\right) = 4{,}793 \text{ Hz} \quad \rightarrow \boldsymbol{p}_2 = \left\{-4{,}779,\ 1\right\}^\mathrm{T} \text{ m}$$

El primer mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 0,9154 Hz en el qual el suport i la plataforma es mouen en fase i amb una relació d'amplituds de $x_1/x_2 = 1{,}046$.

El segon mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 4,793 Hz en el qual el suport i la plataforma es mouen en contrafase i amb una relació d'amplituds de $x_1/x_2 = -4{,}779$.

En ambdós modes propis, el moviment del suport és superior al moviment de la plataforma, cosa lògica si es té en compte la relació de masses dels dos elements.

e) Si es pren la matriu $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$, que té per columnes els vectors propis de la matriu dinàmica $\boldsymbol{D}$, i a l'equació matricial del moviment lliure [1] es fa el canvi a coordenades modals, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}\ \xi$, i es premultiplica per $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, s'obté:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\ \ddot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\ \dot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\ \xi = \boldsymbol{0}$$

Les matrius $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}$ són diagonals.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2437,76 & 0 \\ 0 & 11137,3 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 80638,7 & 0 \\ 0 & 1,01\cdot 10^7 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

La matriu $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ només és diagonal en casos particulars com en el d'esmorteïment proporcional o esmorteïment de Rayleigh, on la matriu $\boldsymbol{C}$ és una combinació lineal d'$\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{K}$. En aquest cas

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1004,26 & 466,667 \\ 466,667 & 67804,6 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

Els termes diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ descriuen l'esmorteïment directament associat a cada coordenada modal ξ_i, i per tant a cada mode propi. Amb aquestes consideracions, negligint l'acoblament per esmorteïment, la raó d'esmorteïment de cada mode és:

$$\zeta_i = \frac{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \zeta_1 = 0,03581 \\ \zeta_2 = 0,1011 \end{array}$$

En un sistema lliure, els modes propis descriuen moviments que ni la inèrcia ni la rigidesa del sistema acoblen o fan dependents. Els termes no diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ són els causants de l'acoblament per esmorteïment dels modes propis.

f) Les equacions del moviment [1] corresponen al sistema lliure o autònom, sense elements que originen forces o parells funció del temps. L'efecte d'aquestes forces s'inclou en l'equació del moviment amb el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ que s'obté de l'expressió de la potència de les forces o parells que generen. $P = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la coordenada q_i i és la component e_i del vector d'excitació.

En aquest cas, el vector d'excitació ve donat per $\boldsymbol{e} = \left\{0,\, c_2\, \dot{z}(t) + k_2\, z(t)\right\}^{\mathrm{T}}$ i l'equació matricial del moviment és

$$\boldsymbol{M}\, \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\, \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} \qquad [2]$$

La matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ prenent com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ i com a sortida el moviment descrit amb el vector $\boldsymbol{q}$ s'obté fent la transformada de Fourier de l'equació matricial del moviment [2].

$$\left(-\boldsymbol{M}\, \omega^2 + \boldsymbol{C}\, \omega\, \mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}(\omega)\, \boldsymbol{E} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{H}(\omega) = \left(-\boldsymbol{M}\, \omega^2 + \boldsymbol{C}\, \omega\, \mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)^{-1}$$

g) Anomenant $\boldsymbol{H}_{ij}$ les components de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, la Transformada de Fourier del moviment alternatiu de la taula i de la base a causa de la component variable de la força F_{e} –excitació– ve donat per:

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{H}_{12}(\mathrm{j}\,\omega\, c_2 + k_2)\boldsymbol{Z}; \quad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{H}_{22}(\mathrm{j}\,\omega\, c_2 + k_2)\boldsymbol{Z}$$

En règim estacionari el moviment alternatiu del suport i la plataforma és: harmònic de la mateixa freqüència que l'excitació, d'amplitud igual a l'amplitud de l'excitació multiplicada pel mòdul de la resposta freqüencial a la freqüència d'excitació i desfasada respecte a l'excitació un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència d'excitació. En resum

$$x_1(t) = \left|\boldsymbol{H}_{12}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)c_2 + k_2\right)\right| z_{\mathrm{p}} \cos\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\, t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{12}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)c_2 + k_2\right)\right]\right)$$
$$x_2(t) = \left|\boldsymbol{H}_{22}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)c_2 + k_2\right)\right| z_{\mathrm{p}} \cos\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\, t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{22}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\pi f_{\mathrm{e}}\right)c_2 + k_2\right)\right]\right)$$

Per tant, les amplituds de les velocitats del suport i de la plataforma $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ vénen donades per:

$$\dot{x}_{1\mathrm{p}} = \left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)x_{1\mathrm{p}} = \left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)\left|\boldsymbol{H}_{12}\left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)c_2 + k_2\right)\right|z_\mathrm{p} = 0,3599\ \mathrm{mm/s}$$

$$\dot{x}_{2\mathrm{p}} = \left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)x_2 p = \left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)\left|\boldsymbol{H}_{22}\left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)\left(\mathrm{j}\left(2\,\pi\,f_\mathrm{e}\right)c_2 + k_2\right)\right|z_\mathrm{p} = 0,3229\ \mathrm{mm/s}$$

Per tant, la velocitat relativa és: $\dot{x}_{1\mathrm{p}} - \dot{x}_{2\mathrm{p}} = 36,99\cdot 10^{-3}\mathrm{mm/s}$.

h) Comparant el resultat obtingut en el cas d'un grau de llibertat amb el resultat obtingut en l'estudi del sistema de dos graus de llibertat, s'observa que l'amplitud de la velocitat de vibració ha disminuït.

1 Les freqüències pròpies d'una corda tensada, de rigidesa a flexió negligible, segueixen una sèrie harmònica completa de freqüència fonamental $f = 65$ Hz. Si aquesta corda s'excita a 140 Hz, la freqüència de la vibració estacionària resultant és:

A 130 Hz

B 65 Hz

C 102,5 Hz

D 140 Hz

2 La vibració d'un vehicle causada per la circulació per una pista empedrada és una vibració

A Autoexcitada

B Residual

C Excitada

D Lliure

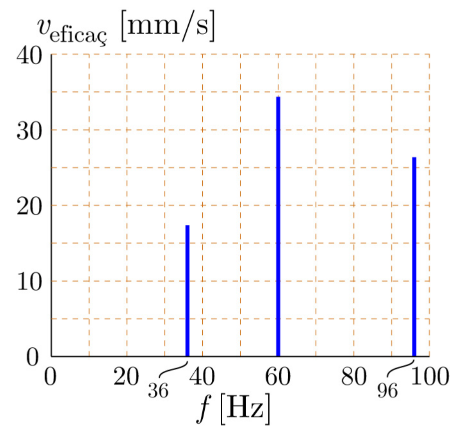
3 En un sistema vibratori lineal, la forma d'ona de l'excitació i la forma d'ona de la resposta en règim estacionari són iguals

A Sempre.

B Només si l'excitació és sinusoidal.

C Només si l'excitació és periòdica.

D Només si l'excitació produeix ressonància.



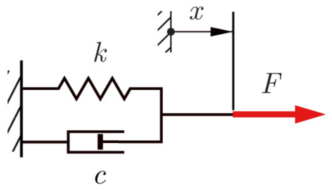
4 A la figura es mostra l'espectre freqüencial en valor eficaç d'un senyal periòdic de velocitat. El fonamental és de freqüència:

A 12 Hz

B 24 Hz

C 36 Hz

D 60 Hz



$k = 10$ N/mm

$c = 0{,}2$ N/(mm/s)

5 L'extrem lliure del grup molla-amortidor de la figura es fa moure entorn de la posició d'equilibri amb un moviment harmònic d'amplitud $x_{\mathrm{p}} = 10$ mm i freqüència $f = 8$ Hz. Quina és l'amplitud de la força necessària?

A 100,0 N

B 102,0 N

C 141,8 N

D 101,3 N

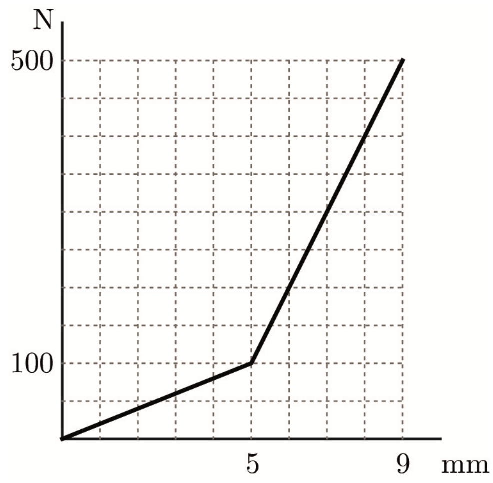
6 L'energia mitjana que cal subministrar a un sistema per mantenir-lo vibrant en règim estacionari és:

A Nul·la.

B Igual a la dissipada per les resistències passives.

C Creixent amb el temps.

D Decreixent amb el temps.



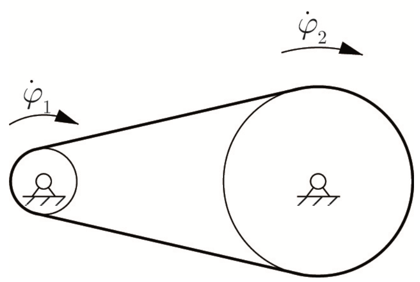
7 Per tal d'aïllar una màquina de massa $m = 120$ kg del terra es disposa d'uns suports elàstics de rigidesa no lineal que es pot aproximar amb el gràfic de la figura i d'esmorteïment negligible. Si es disposen 4 elements elàstics, a partir de quina freqüència d'excitació l'aïllament és del 80%? **Preneu $\mathbf{g = 10\ m/s^2}$**

A 13,78 Hz

B 7,958 Hz

C 4,873 Hz

D 22,51 Hz



8 La transmissió per corretja de la figura té una relació de transmissió $\tau = \dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_1 = 0,35$. Si es planteja el seu estudi amb un model de comportament lineal que té en compte la flexibilitat de la corretja i que utilitza el vector de coordenades generalitzades $q = \left\{\varphi_1 \quad \varphi_2\right\}^{\mathrm{T}}$, el mode propi de mecanisme és:

A $\left\{0,35 \quad 1\right\}^{\mathrm{T}}$

B $\left\{1 \quad 0,35\right\}^{\mathrm{T}}$

C $\left\{0,65 \quad 1\right\}^{\mathrm{T}}$

D $\left\{1 \quad 0,65\right\}^{\mathrm{T}}$

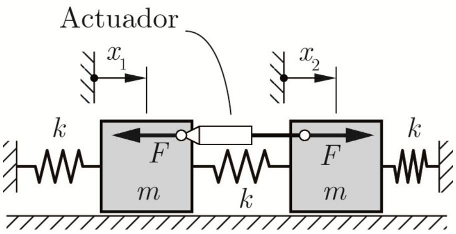
9 Les coordenades pròpies d'un sistema vibratori de comportament lineal poden estar acoblades dinàmicament a causa de:

A La inèrcia del sistema.

B La rigidesa del sistema.

C L'esmorteïment del sistema.

D Tant per la inèrcia, com per la rigidesa com per l'esmorteïment del sistema.



10 La forma dels modes propis del sistema de la figura es representa mitjançant els vectors propis $\boldsymbol{p}_1 = \{1, 1\}^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{p}_2 = \{1, -1\}^{\mathrm{T}}$. Si l'actuador fa una força F de repulsió entre els seus extrems, l'excitació de cadascun dels modes és:

A p_1:0 p_2:$-2F$

B p_1:$-2F$ p_2:0

C p_1:$-F$ p_2:F

D p_1:F p_2:$-F$

Full de respostes

Vibracions Mecàniques

19 de juny de 2023

P	0	1	2	3	4
1	D	A	B	B	A
2	C	D	C	C	B
3	B	A	A	B	C
4	A	D	D	D	B
5	C	B	D	C	A
6	B	C	A	D	D
7	D	C	A	D	D
8	B	C	C	A	C
9	C	B	B	A	D
10	A	B	B	A	C