Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

# Vibracions Mecàniques

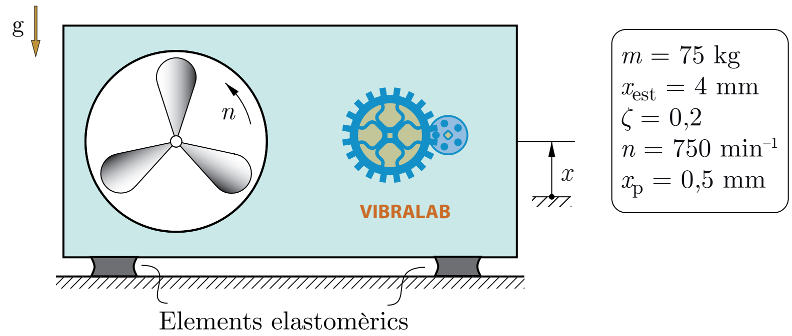
## Exàmens Curs 2017-2018

Lluïsa Jordi

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: enunciat, 2 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.

## Exercici




La unitat externa d'un sistema d'aire condicionat té una massa $m = 75$ kg i recolza sobre quatre elements elastomèrics de comportament lineal que es deformen $x_{\mathrm{est}} = 4$ mm sota el pes de la unitat i que tenen una raó d'esmorteïment $\zeta = 0{,}2$. Determineu:

*a*) La freqüència pròpia $f_0$ de les petites oscil·lacions verticals de la unitat a l'entorn de la posició d'equilibri.

Amb el pas del temps, el motor–ventilador de la unitat, que gira a $n = 750$ min$^{-1}$, es desequilibra i produeix una vibració vertical d'amplitud $x_{\mathrm{p}} = 0{,}5$ mm. Suposeu que els elements elastòmerics no han canviat les seves característiques i, per al moviment vibratori vertical, determineu:

*b*) El valor eficaç de les amplituds $v_{\mathrm{p}}$ de la velocitat i $a_{\mathrm{p}}$ de l'acceleració de la vibració provocada pel desequilibri.

*c*) La funció de resposta freqüencial del sistema prenent com a entrada el desequilibri que provoca la vibració i com a sortida l'amplitud de la vibració.

*d*) El valor del desequilibri $u$, en kg·mm, que provoca la vibració.

*e*) El valor de l'amplitud $F_{\mathrm{Tp}}$ de la força transmesa a terra.

*f)* L'atenuació que proporcionen els elements elàstics, expressada en dB, i l'aïllament, en percentatge, que representen.

## Solució Exercici

*a*) Per a l'estudi de les vibracions verticals de la unitat externa del sistema d'aire condicionat, se la pot assimilar a un sistema massa–molla–amortidor d'un grau de llibertat per als quals la freqüència pròpia $f_0$ de les petites oscil·lacions a l'entorn de la posició d'equilibri es determina a partir del valor de la rigidesa i de la massa. La unitat recolza sobre quatre elements elastomèrics la qual cosa permet escriure:

$$k_{\text{total}}\, x_{\text{est}} = m\,\mathrm{g} \rightarrow \quad k_{\text{total}} = \frac{m\,\mathrm{g}}{x_{\text{est}}} \text{ amb } k_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{4} k_i \text{ i en conseqüència}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{total}}}{m}} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{x_{\text{est}}}} = 7{,}881 \text{ Hz.}$$

*b*) Tenint en compte que en règim estacionari el moviment vibratori és harmònic simple de freqüència $f = n/60$, les amplituds $v_{\text{p}}$ de la velocitat i $a_{\text{p}}$ de l'acceleració de vibració es poden obtenir a partir de l'amplitud $x_{\text{p}}$ com:

$$v_{\text{p}} = x_{\text{p}}\omega = x_{\text{p}}\left(2\,\pi\,f\right) = 39{,}27 \text{ mm/s} \quad \rightarrow \quad v_{\text{ef}} = \frac{v_{\text{p}}}{\sqrt{2}} = 27{,}77 \text{ mm/s}$$

$$a_{\text{p}} = v_{\text{p}}\omega = x_{\text{p}}\omega^2 = x_{\text{p}}\left(2\,\pi\,f\right)^2 = 3{,}084 \text{ m/s}^2 \rightarrow \quad a_{\text{ef}} = \frac{a_{\text{p}}}{\sqrt{2}} = 2{,}181 \text{ m/s}^2$$

*c*) La funció de resposta freqüencial que relaciona el desequilibri que provoca la vibració (pres com a entrada) i l'amplitud de la vibració (presa com a sortida) es pot obtenir, per exemple, aplicant la transformada de Fourier a l'equació del moviment. En aquest cas:

$$m\,\ddot{x} + c_{\text{total}}\,\dot{x} + k_{\text{total}}\,x = u\,\omega^2\cos\left(\omega\,t\right) \quad \text{amb} \quad c_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{4} c_i$$

$$\left(m\left(\omega\,\mathrm{j}\right)^2 + c_{\text{total}}\left(\omega\,\mathrm{j}\right) + k_{\text{total}}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\omega^2$$

$$\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{U}} = \frac{\omega^2}{m\left(\omega\,\mathrm{j}\right)^2 + c_{\text{total}}\left(\omega\,\mathrm{j}\right) + k_{\text{total}}}$$

*d*) El valor $u$ del desequilibri que provoca la vibració s'obté a partir del mòdul de la funció de resposta freqüencial trobada a l'apartat anterior:

$$\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{U}} = \frac{\omega^2}{m\left(\omega\,\mathrm{j}\right)^2 + c_{\text{total}}\left(\omega\,\mathrm{j}\right) + k_{\text{total}}}$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{U}}\right| = \frac{x_\mathrm{p}}{u} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(k_\mathrm{total} - m\,\omega^2\right)^2 + \left(c_\mathrm{total}\,\omega\right)^2}}$$

$$\frac{x_\mathrm{p}}{u} = \frac{\omega^2}{k_\mathrm{total}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} \qquad \text{amb } \rho = \frac{f}{f_0}$$

amb la qual cosa

$$u = \frac{k_\mathrm{total}\,x_\mathrm{p}}{\omega^2}\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\rho\right)^2} \;\text{ essent }\; \rho = \frac{n/60}{f_0} = 1{,}586.$$

Així doncs, $u = 24{,}49$ kg·mm .

*e*) L'amplitud $F_\mathrm{Tp}$ de la força transmesa a terra es pot obtenir a partir de l'amplitud de la força que provoca la vibració (força excitadora) i del factor de transmissió.

$$F_\mathrm{Tp} = F_\mathrm{ep}\frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} = u\,\omega^2\frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} = 108{,}9 \text{ N}$$

*f*) L'atenuació, en dB, que proporcionen els elements elàstics s'obté a partir del factor de transmissió com:

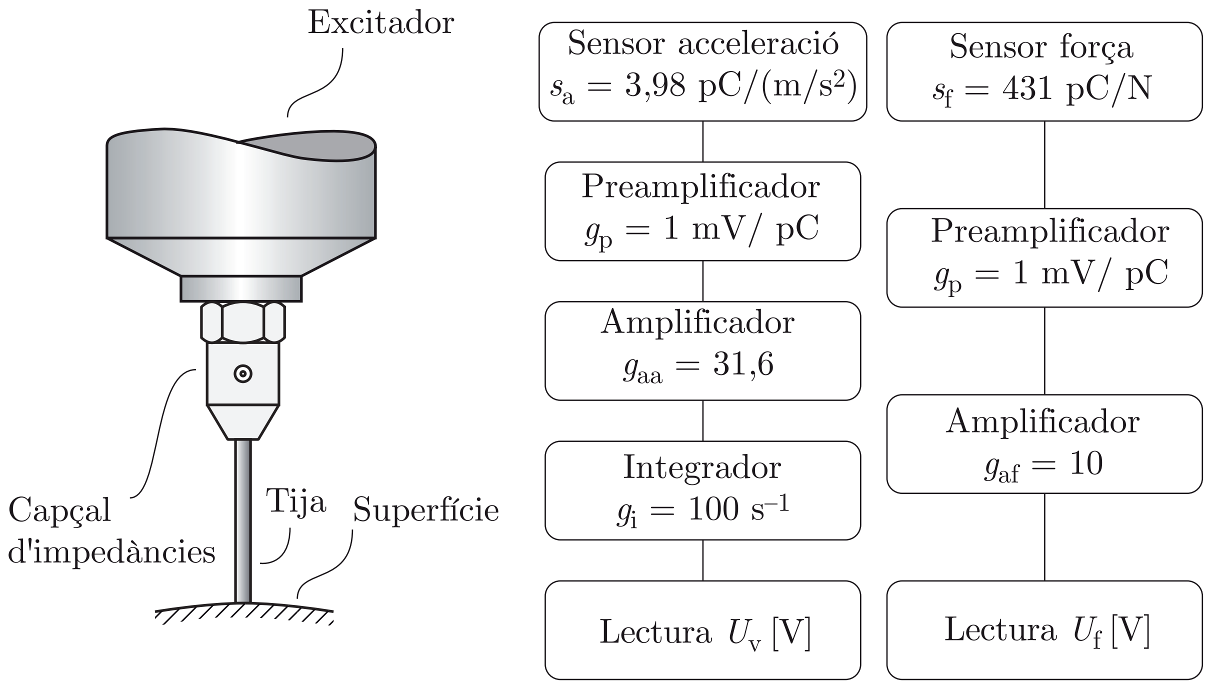
Atenuació = 20 lg(FT) = –2,845 dB.

L'aïllament de vibracions que proporcionen els elements elàstics s'obté, també, a partir del factor de transmissió com:

Aïllament = 1 – FT = 0,2793 = 27,93%.

- Contingut del sobre: Enunciat, 2 fulls quadriculats i 1 full en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.

---




Per mesurar l'admitància en un punt d'un objecte en la direcció normal a la seva superfície s'utilitza un capçal d'impedàncies, element que incorpora un sensor de força i un sensor d'acceleració. Un excitador de vibracions genera l'excitació que arriba a l'objecte a través del capçal d'impedàncies i d'una tija d'acer, utilitzada per separar el capçal d'impedàncies de la superfície de l'objecte que està a temperatura elevada. Les cadenes de mesura de força i d'excitació tenen les característiques indicades a la figura.

En un experiment amb l'excitació harmònica, s'obté la següent taula de lectures en valor eficaç:

| $f$ [Hz] | 10 | 15 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_f$ [V] | 2,931 | 2,978 | 2,774 | 2,753 | 2,682 | 2,565 | 2,544 | 2,541 | 2,610 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_\mathrm{v}$ [V] | 0,007 | 0,014 | 0,031 | 0,037 | 0,044 | 0,049 | 0,051 | 0,048 | 0,044 |
| $f$ [Hz] | 27 | 28 | 29 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | |
| $U_\mathrm{f}$ [V] | 2,563 | 2,688 | 2,752 | 2,790 | 2,773 | 2,862 | 2,841 | 2,849 | |
| $U_\mathrm{v}$ [V] | 0,037 | 0,033 | 0,030 | 0,026 | 0,017 | 0,013 | 0,010 | 0,009 | |

*a*) Calculeu el mòdul de l'admitància obtinguda a partir dels resultats experimentals i dibuixeu-ne el seu gràfic en funció de la freqüència.

Associeu l'admitància trobada a la d'un sistema d'un grau de llibertat i determineu:

*b*) La freqüència pròpia $f_0$ i la raó d'esmorteïment $\zeta$.

*c*) Els paràmetres d'inèrcia $m$, rigidesa $k$ i esmorteïment $c$ equivalents.

Si sobre el punt estudiat actua una força periòdica de freqüència fonamental $f_1 = 11$ Hz i del següent espectre de valor eficaç:

| Harmònic | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $F_{\mathrm{ef}\ i}$ [N] | 0,962 | 0,545 | 0,726 |

*d*) Determineu l'espectre del valor eficaç de la velocitat de vibració d'aquest punt.

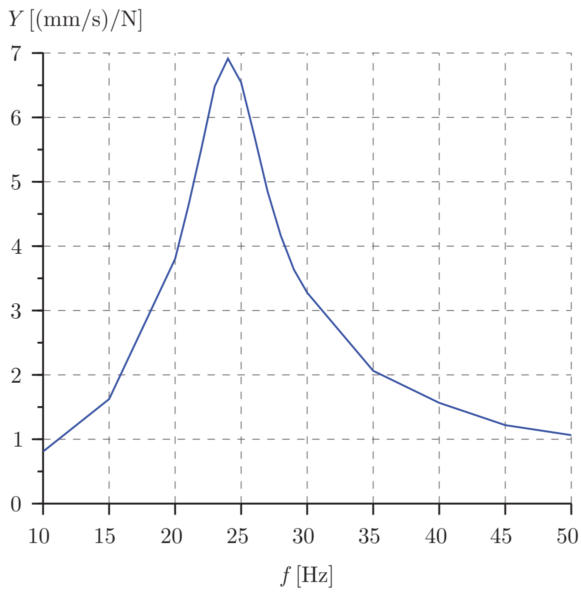
*e*) Determineu el valor eficaç $F_{\mathrm{ef\ total}}$ de la força i el valor eficaç $v_{\mathrm{ef\ total}}$ de la velocitat de vibració, ambdós expressats en dB i referits respectivament a $10^{-6}$ N i $10^{-6}$ mm/s.

## Solució

*a*) El valor del mòdul de l'admitància per a les diferents freqüències s'obté a partir de les característiques de les cadenes de mesura i de les lectures obtingudes.

$$\left|\boldsymbol{Y}(f)\right| = Y(f) = \left|\frac{\boldsymbol{V}(f)}{\boldsymbol{F}(f)}\right| = \frac{v_\mathrm{p}}{F_\mathrm{p}} = \frac{v_\mathrm{ef}}{F_\mathrm{ef}} = \frac{U_\mathrm{v}(s_a \cdot g_p \cdot g_{aa} \cdot g_i)^{-1}}{U_\mathrm{f}(s_f \cdot g_p \cdot g_{af})^{-1}} \tag{1}$$

| $f$ [Hz] | $Y$ [(mm/s)/N] |
|---|---|
| 10 | 0,818 |
| 15 | 1,611 |
| 20 | 3,830 |
| 21 | 4,606 |
| 22 | 5,622 |
| 23 | 6,547 |
| 24 | 6,870 |
| 25 | 6,474 |
| 26 | 5,777 |
| 27 | 4,947 |
| 28 | 4,207 |
| 29 | 3,736 |
| 30 | 3,194 |
| 35 | 2,101 |
| 40 | 1,557 |
| 45 | 1,206 |
| 50 | 1,082 |




*b*) Si l'admitància obtinguda s'associa a la d'un sistema d'un grau de llibertat

$$Y(f) = \frac{\omega}{\left[\left(m\,\omega^2 - k\right)^2 + \left(c\,\omega\right)^2\right]^{1/2}} \quad \text{amb} \quad \omega = 2\,\pi\,f\,, \tag{2}$$

el seu màxim es produeix quan la freqüència és igual a la freqüència pròpia del sistema i per tant: $f_0 = 24$ Hz.

Per a un sistema d'un grau de llibertat la raó d'esmorteïment és $\zeta = \Delta f\,/\,(2\,f_0)$, essent $\Delta f$ l'ample de banda freqüencial per al qual el mòdul de l'admitància és igual o superior al màxim d'aquest dividit per $\sqrt{2}$. Així:

$$\zeta = \frac{\Delta f}{2\,f_0} = \frac{6}{2 \cdot 24} = 0{,}125$$

*c*) El paràmetre d'esmorteïment $c$ es pot obtenir directament del gràfic de l'admitància tal com es dedueix de l'expressió 2 per a $\omega = \sqrt{k/m}$.

$$Y(f_0) = Y_{\text{màx}} = \frac{1}{c} = 6{,}870 \text{ (mm/s)/N} \quad \rightarrow \quad c = 145{,}6 \text{ N/(m/s)}$$

Els paràmetres $m$ i $k$ es troben a partir de $c$, de la freqüència pròpia $f_0$ i de la raó d'esmorteïment $\zeta$.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_0} = \frac{c\,\omega_0}{2\,k} = \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = \dfrac{c}{2\,\zeta\,\omega_0} = 3{,}861 \text{ kg} \\ k = \dfrac{c\,\omega_0}{2\,\zeta} = 87{,}80 \text{ N/mm} \end{cases}$$

*d*) El valor eficaç $v_{\text{ef }i}$ de cadascun dels harmònics –de freqüència $f_i$– de la velocitat de vibració és $v_{\text{ef }i} = Y(f_i)\,F_{\text{ef }i}$ (vegeu l'expressió 1). Així doncs l'espectre del valor eficaç de la velocitat de vibració és:

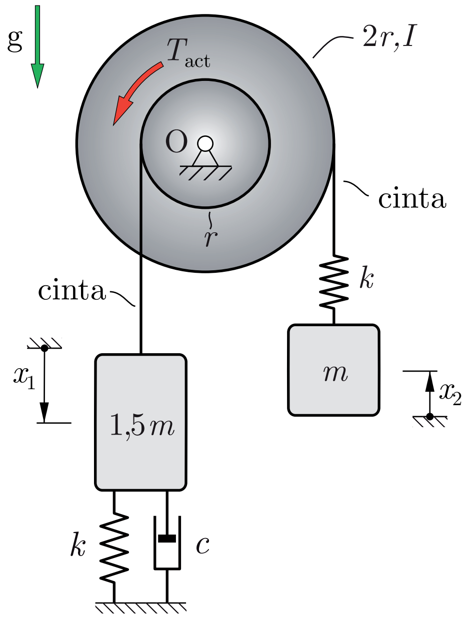
| Harmònic | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $v_{\text{ef }i}$ [mm/s] | 0,9487 | 3,072 | 1,796 |

*e*) El valor eficaç total d'una magnitud és l'arrel quadrada de la suma quadràtica dels valors eficaços dels seus components harmònics.

$$F_{\text{ef total}} = \sqrt{\sum (F_{\text{ef }i})^2} = 1{,}323 \text{ N} = 122{,}4 \text{ dB}_{\text{ref }10^{-6}\text{ N}}$$

$$v_{\text{ef total}} = \sqrt{\sum (v_{\text{ef }i})^2} = 3{,}683 \text{ mm/s} = 131{,}3 \text{ dB}_{\text{ref }10^{-6}\text{ mm/s}}$$

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa d'**una hora per al test** i de **dues hores per al problema**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.




$m = 500$ kg
$I = 0{,}2$ kg m$^2$
$r = 0{,}25$ m
$k = 20$ N/mm
$c = 400$ N/(m/s)

En el sistema elevador vertical de la figura, les politges de radi $r$ i $2r$ són solidàries, giren entorn del punt fix O i tenen, en total, un moment d'inèrcia reduït a la rotació de valor $I$. Es considera que les cintes són d'inèrcia negligible i que no llisquen sobre les politges. El parell de l'actuador reduït a la rotació de les politges és $T_{\text{act}}$. Per a l'anàlisi vibratòria del sistema entorn de la configuració d'equilibri, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{x_1, x_2\}^{\mathrm{T}}$.

Si l'actuador no introdueix cap parell en el sistema, determineu:

*a*) Les expressions de l'energia cinètica $E_{\mathrm{c}}$, de l'energia potencial $E_{\mathrm{p}}$ i de la potència de les forces no conservatives $P_{\mathrm{nc}}$.

*b*) Les matrius d'inèrcia $\boldsymbol{M}$, de rigidesa $\boldsymbol{K}$ i d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$.

*c*) Les freqüències pròpies $f_{0i}$ i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$. Interpreteu els resultats.

*d*) L'esmorteïment dels modes propis $\zeta_i$ si se'n negligeix l'acoblament per esmorteïment.

Si l'actuador introdueix un parell reduït a la rotació de les politges $T_{\text{act}}(t)$, determineu:

*e*) L'expressió de la matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ si es pren com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$, que té per components els termes independents de les equacions del moviment, i com a sortida el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q}$.

*f*) Les funcions temporals $x_1(t)$ i $x_2(t)$ del règim estacionari, en funció dels components $\boldsymbol{H}_{ij}$ de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, si el parell que actua sobre les politges és harmònic $T_{\text{act}}(t) = T_{\text{act p}} \cos(2\pi f_1 \cdot t)$. Particularitzeu els resultats per a $T_{\text{act p}} = 15$ Nm i $f_1 = 0{,}5$ Hz.

## Solució

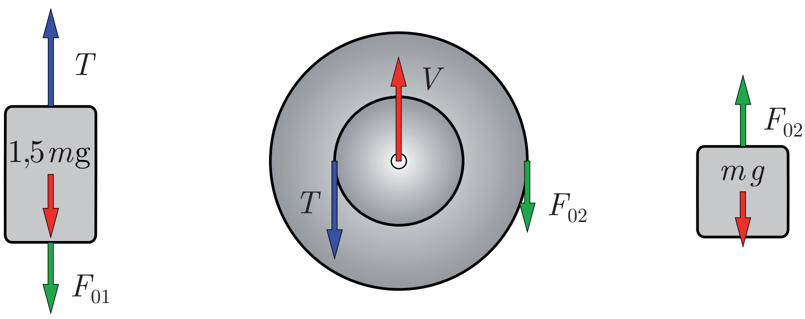
*a*) L'energia cinètica $E_\mathrm{c}$ del conjunt és la suma de l'energia cinètica dels dos blocs més la de les politges.

$E_\mathrm{c} = E_{\mathrm{c\,blocs}} + E_{\mathrm{c\,politges}} = \dfrac{1}{2}\left(1,5\ m\right)\dot{x}_1^2 + \dfrac{1}{2} m\,\dot{x}_2^2 + \dfrac{1}{2} I\omega^2$, essent $\omega$ la velocitat de rotació de les politges.

Ara bé, com que el sistema té dos graus de llibertat representats per $\dot{\boldsymbol{q}} = \left\{\dot{x}_1, \dot{x}_2\right\}^\mathrm{T}$, cal relacionar la velocitat angular de les politges amb aquestes variables. Si es considera que les cintes no llisquen sobre les politges, tal com afirma l'enunciat, aleshores $\omega = \dot{x}_1 / r$ i per tant l'expressió de l'energia cinètica és:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\left(1,5\ m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\,\dot{x}_2^2$$

L'energia potencial $E_\mathrm{p}$ del conjunt és la suma de l'energia potencial associada als pesos i a les forces de les molles. Les tensions de les molles en la posició d'equilibri es poden determinar a partir del diagrama de cos lliure de cadascun dels sòlids.




$$\left.\begin{aligned} T &= F_{01} + 1,5\ mg \\ T\,r &= 2F_{02}\,r \\ F_{02} &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{01} = 0,5\,mg\ ;\ F_{02} = mg \rightarrow \begin{cases} F_{\mathrm{m}1} = F_{01} - k\,x_1 \\ F_{\mathrm{m}2} = F_{02} + k\left(2x_1 - x_2\right) \end{cases}$$

$$E_{\mathrm{p\ pes}} = -1,5\,mg\,x_1 + mg\,x_2$$

$$E_{\mathrm{p\ molles}} = -F_{01}\,x_1 + \frac{1}{2}k\,x_1^2 + F_{02}\left(2x_1 - x_2\right) + \frac{1}{2}k\left(2x_1 - x_2\right)^2$$

En definitiva, $E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}k\,x_1^2 + \dfrac{1}{2}k\left(2x_1 - x_2\right)^2$

La potència de les forces no conservatives $P_{\text{nc}}$ és l'associada a les resistències passives de l'amortidor.

$P_{\text{nc}} = \left(-c\,\dot{x}_1\right)\dot{x}_1$

*b*) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment es poden trobar a partir de les expressions de l'energia cinètica, de l'energia potencial i de la potència de les forces no conservatives.

Per observació directa de l'energia cinètica i recordant que

$$E_{\text{c}}\Big|_{\boldsymbol{q}_{\text{e}}} = \sum_{i,j}\frac{1}{2}m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \ \text{ s'obté: } \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1{,}5\ m + \dfrac{I}{r^2} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 753{,}2 & 0 \\ 0 & 500 \end{pmatrix} \text{kg}$$

Els elements de la matriu de rigidesa $\boldsymbol{K}$ són: $k_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 E_{\text{p}}}{\partial\,q_i\,\partial\,q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_{\text{eq}}}$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 5k & -2k \\ -2k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix} \cdot 10^3\ \text{N/m}$$

La matriu d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$ s'obté de l'expressió de la potència de les forces no conservatives, $P_{\text{nc}} = \sum_i Q_i\,\dot{q}_i$ on $Q_i$ és la força generalitzada associada a la coordenada $q_i$ i $c_{ij} = -\partial\,Q_i\big/\partial\,\dot{q}_j\Big|_{\boldsymbol{q}_{\text{eq}},\dot{\boldsymbol{q}}=0}$.En aquest cas:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{N/(m/s)}$$

Amb les matrius $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{C}$ l'equació matricial del moviment lliure del sistema linealitzat a l'entorn de la configuració d'equilibri és

$$\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad [1]$$

*c*) Les freqüències pròpies $f_{0i}$ i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$ s'obtenen diagonalitzant la matriu dinàmica $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$. En funció dels valors propis $\lambda_i$, les freqüències pròpies són: $f_{0i} = \sqrt{\lambda_i}\big/\left(2\pi\right)$. La forma de vibrar associada al mode propi de freqüència pròpia $f_{0i}$ queda descrita pel vector propi $\boldsymbol{p}_i$ associat al valor propi $\lambda_i$.

$$f_{01} = \sqrt{\lambda_1}\Big/\left(2\,\pi\right) = 0,4021\ \text{Hz} \quad \rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \left\{1,\ \ 2,380\ \right\}^{\mathrm{T}}\ \text{m}$$

$$f_{02} = \sqrt{\lambda_2}\Big/\left(2\,\pi\right) = 2,053\ \text{Hz} \quad \rightarrow \ \boldsymbol{p}_2 = \left\{-1,580,\ \ 1\ \right\}^{\mathrm{T}}\ \text{m}$$

El primer mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 0,4021 Hz en el qual quan el bloc de l'esquerra, conjuntament amb el moviment rotatori de les politges, baixa una unitat, el bloc de la dreta en puja 2,380.

El segon mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 2,053 Hz en el qual els blocs pugen o baixen amb una relació d'amplituds $x_1/x_2 = 1{,}580$.

*d*) Si es pren la matriu $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}$, que té per columnes els vectors propis de la matriu dinàmica $\boldsymbol{D}$, i a l'equació matricial del moviment lliure [1] es fa el canvi a coordenades modals, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}\,\xi$ , i es premultiplica per $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, s'obté:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\,\ddot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\,\dot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\,\xi = \boldsymbol{0}$$

Les matrius $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}$ són diagonals.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2379,79 & 0 \\ 0 & 3584,91 \end{pmatrix}\ \text{Unitats SI}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 395957 & 0 \\ 0 & 22884,9 \end{pmatrix}\ \text{Unitats SI}$$

La matriu $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ només és diagonal en casos particulars com en el d'esmorteïment proporcional o esmorteïment de Rayleigh, on la matriu $\boldsymbol{C}$ és una combinació lineal d'$\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{K}$. En aquest cas

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 998,294 & -631,916 \\ -631,916 & 400 \end{pmatrix}\ \text{Unitats SI}$$

Els termes diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ descriuen l'esmorteïment directament associat a cada coordenada modal $\xi_i$, i per tant a cada mode propi. Amb aquestes consideracions, negligint l'acoblament per esmorteïment, la raó d'esmorteïment de cada mode és:

$$\zeta_i = \frac{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= 0,0221 \\ \zeta_2 &= 0,0163 \end{aligned}$$

En un sistema lliure, els modes propis descriuen moviments que ni la inèrcia ni la rigidesa del sistema acoblen o fan dependents. Els termes no diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ són els causants de l'acoblament per esmorteïment dels modes propis.

*e*) Les equacions del moviment [1] corresponen al sistema lliure o autònom, sense accionaments, que originen forces o parells funció del temps. L'efecte d'aquests accionaments s'inclou en l'equació del moviment amb el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ que s'obté de l'expressió de la potència de les forces o parells que generen. $P_{\mathrm{acc}} = \sum_i Q_{\mathrm{acc}\,i}\, \dot{q}_i$ on $Q_{\mathrm{acc}\,i}$ és la força generalitzada dels accionaments associada a la coordenada $q_i$ i és la component $e_i$ del vector d'excitació.

La potència que genera l'actuador sobre les politges és $\left(T_{\mathrm{act}}(t)\,\dot{x}_1\right)/\,r$. Així doncs, la força generalitzada associada a aquest parell per a la coordenada $x_1$ és $T_{\mathrm{act}}(t)\ /\ r$ i, el vector d'excitació ve donat per $\boldsymbol{e} = \left\{T_{\mathrm{act}}/r\,,\,0\right\}^{\mathrm{T}}$ l'equació matricial del moviment és

$$\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} \qquad [2]$$

La matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ prenent com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ i com a sortida el moviment descrit amb el vector $\boldsymbol{q}$ s'obté fent la transformada de Fourier de l'equació matricial del moviment [2].

$$\left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2 + \boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}(\omega)\,\boldsymbol{E} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{H}(\omega) = \left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2 + \boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)^{-1}$$

*f*) Anomenant $\boldsymbol{H}_{ij}$ les components de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, la Transformada de Fourier del moviment alternatiu dels blocs a causa de la component variable del parell $T_{\mathrm{act}}$ –excitació– ve donat per:

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{H}_{11}\frac{\boldsymbol{T}_{\mathrm{act}}}{r} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{H}_{21}\frac{\boldsymbol{T}_{\mathrm{act}}}{r}$$

En règim estacionari el moviment alternatiu dels blocs és: harmònic de la mateixa freqüència que l'excitació, d'amplitud igual a l'amplitud de l'excitació multiplicada pel mòdul de la resposta freqüencial a la freqüència d'excitació i desfasada respecte a l'excitació un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència d'excitació. En resum

$$x_1(t) = \left|\boldsymbol{H}_{11}\left(2\,\pi\,f_1\right)\right| \frac{T_{\text{act p}}}{r} \cos\left(2\,\pi\,f_1\,t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{11}\left(2\,\pi\,f_1\right)\right]\right)$$

$$x_2(t) = \left|\boldsymbol{H}_{21}\left(2\,\pi\,f_1\right)\right| \frac{T_{\text{act p}}}{r} \cos\left(2\,\pi\,f_1\,t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{21}\left(2\,\pi\,f_1\right)\right]\right)$$

Per a $T_{\text{act p}} = 15$ Nm i $f_1 = 0{,}5$ Hz s'obté:

$$x_1(t) = 4{,}381 \cos\left(2\,\pi\,0{,}5\,t - 3{,}050\right) \text{mm}$$

$$x_2(t) = 11{,}63 \cos\left(2\,\pi\,0{,}5\,t - 3{,}050\right) \text{mm}$$

**VIBRACIONS MECÀNIQUES** **240IME21** **CURS 2017-2018**

**ETSEIB** **8 de juny de 2018** **Permutació: 0**

**1** En fregar la boca d'una copa de vidre que conté aigua es produeix una vibració de freqüència audible. Aquesta vibració és:

A Lliure.

B Autoexcitada.

C Forçada.

D Paramètrica.

**2** En un sistema de comportament lineal d'un grau de llibertat de característiques $k = 2{\cdot}10^3$ N/mm, freqüència pròpia $f_0 = 200/\pi$ Hz i raó d'esmorteïment $\zeta = 0{,}15$, el mínim de la seva impedància és:

A 1,500 N/(m/s)

B 666,7 N/(m/s)

C 66,67 N/(m/s)

D 1500 N/(m/s)

**3** Quin és el valor eficaç del desplaçament definit per l'expressió: $x(t) = \left(30\cos(2\pi f t) + 40\cos(2\pi f t + 90^{\circ})\right)$ mm ?

A $\left(70/\sqrt{2}\right)$ mm

B $\left(50/\sqrt{2}\right)$ mm

C $\left(10/\sqrt{2}\right)$ mm

D $\left(50\sqrt{2}\right)$ mm

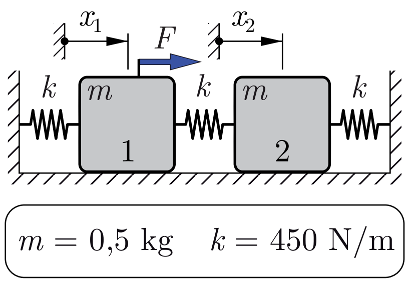
**4** Una màquina de massa $m = 50$ kg està muntada sobre 4 suports elàstics de rigidesa $k = 100$ N/mm cadascun. Aquests suports l'aïllen de vibracions procedents del terra a partir de:

A 20,13 Hz

B 14,24 Hz

C 10,07 Hz

D 7,12 Hz




**5** En el sistema de dos graus de llibertat de la figura, la funció de resposta freqüencial que relaciona l'amplitud del moviment del bloc 1, $x_{1\text{p}}$, quan s'excita el mateix bloc 1 amb una força harmònica d'amplitud $F_\text{p}$ ve donada per l'expressió:

$$H_{11}(\omega) = \frac{2k - m\omega^2}{\left(2k - m\omega^2\right)^2 - k^2}.$$

Les dues freqüències pròpies d'aquest sistema són:

A $f_{01} = 1{,}510$ Hz i $f_{02} = 2{,}615$ Hz.

B $f_{01} = 4{,}775$ Hz i $f_{02} = 8{,}270$ Hz.

C $f_{01} = 30{,}00$ Hz i $f_{02} = 51{,}96$ Hz.

D $f_{01} = 42{,}43$ Hz i $f_{02} = 73{,}48$ Hz.

**6** Per ajustar la rigidesa d'una suspensió només es disposa d'elements elàstics iguals de constant $k$, que es poden muntar en sèrie i en paral·lel. Per obtenir una constant de rigidesa 1,5 $k$ es poden col·locar:

A Dos conjunts en paral·lel de tres elements en sèrie.

B Tres conjunts en sèrie de dos elements en paral·lel.

C Tres conjunts en paral·lel de dos elements en sèrie.

D Un conjunt de dos elements en paral·lel en sèrie amb un tercer element.

**7** Un sistema lineal d'un grau de llibertat, de freqüència pròpia $f_0 = 23$ Hz i raó d'esmorteïment $\zeta = 0{,}2$, és excitat per una força sinusoïdal de freqüència $f_\mathrm{e} = 17$ Hz. En un determinat instant, s'atura l'excitació i el sistema queda fora de la seva posició d'equilibri. El sistema vibrarà a freqüència:

A 16,66 Hz

B 17 Hz

C 22,54 Hz

D 23 Hz

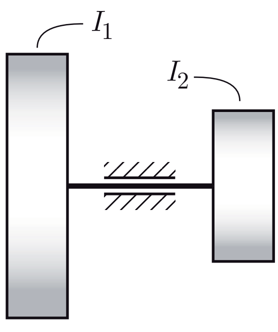
**8** Es realitza una anàlisi espectral de la vibració produïda per una punxonadora, que funciona en règim estacionari, en un punt que li és proper. S'obté que la vibració té components de freqüències 4,2 Hz, 6,3 Hz i 8,4 Hz. La freqüència fonamental d'aquesta vibració és:

A 4,2 Hz

B 6,3 Hz

C La freqüència del component de major amplitud.

D 2,1 Hz




**9** Dos discs de moment axial d'inèrcia $I_1$ i $I_2$ estan units per un eix flexible. La freqüència pròpia del mode propi vibratori del sistema és $f_0$. Si es fixa el disc de moment d'inèrcia $I_1$, la freqüència pròpia del sistema passa a ser.

A $< f_0$ sempre

B $> f_0$ sempre

C $= f_0$ sempre

D $> f_0$ si $I_1 > I_2$

**10** En una nau industrial, el conjunt d'activitats que s'hi realitzen produeixen en un punt de la instal·lació una vibració de valor eficaç $v_{\text{ef total}} = 2{,}6$ mm/s. Es desitja instal·lar una nova màquina però amb el condicionant que la vibració total en valor eficaç no superi 130 dB referits a $10^{-6}$ mm/s. Quin és el màxim valor de vibració en mm/s que pot provocar la nova màquina?

A 1,8 mm/s

B 2,10 mm/s

C 3,16 mm/s

D 3,24 mm/s

**COMPROVEU QUE COINCIDEIX EL NÚMERO DE LA PERMUTACIÓ DEL TEST AMB EL NÚMERO DEL FULL DE MARQUES ÒPTIQUES.**

**Full de respostes**

Vibracions Mecàniques

8 de juny de 2018

| **P** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B | B | B | B | A |
| 2 | D | D | C | D | D |
| 3 | B | C | B | B | A |
| 4 | A | D | B | B | C |
| 5 | B | A | A | A | A |
| 6 | C | A | D | A | D |
| 7 | C | C | C | C | C |
| 8 | D | B | C | A | D |
| 9 | A | C | D | D | B |
| 10 | A | D | A | C | B |