Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

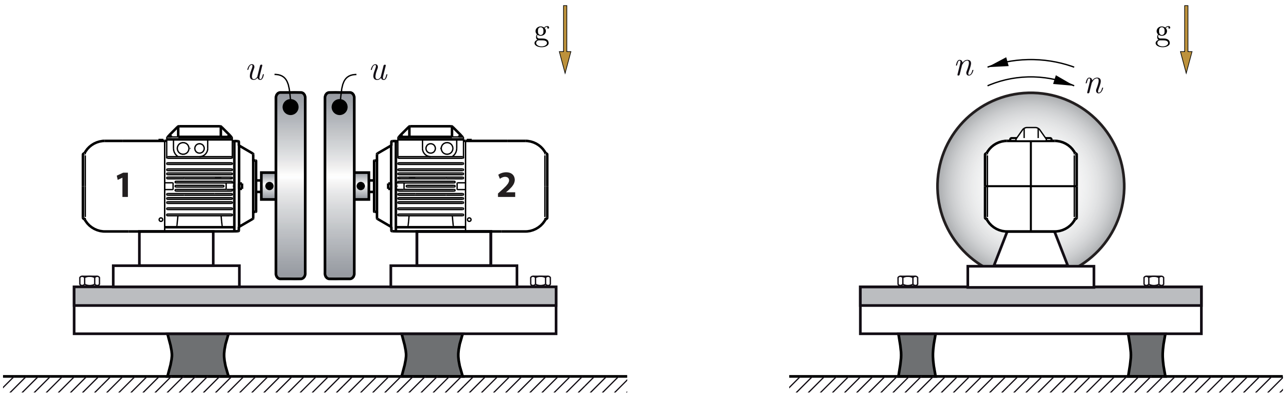
Exàmens Curs 2018-2019

Lluïsa Jordi

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: enunciat, 2 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els blancs en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.

Exercici



$m = 90$ kg $\quad u = 0{,}4$ kg·m $\quad k = 70$ N/mm $\quad c = 100$ N/(m/s) $\quad n = 1500$ min^{-1}

Es desitja dissenyar un banc de proves per establir la vida útil de motors que han de funcionar en condicions especialment dures.

Per simular les condicions de treball, es fa que els motors accionin dos volants idèntics que giren a velocitats angulars iguals i oposades ($n = 1500$ min^{-1}) i que tenen un desequilibri $u = 0{,}4$ kg·m. Cada motor i el seu volant té una massa $m = 90$ kg. El sistema de control garanteix el sincronisme entre els moviments angulars dels motors.

El muntatge dels motors i discos recolza sobre el terra a través de quatre elastòmers de rigidesa $k = 70$ N/mm i esmorteïment $c = 100$ N/(m/s) cadascun.

a) Representeu esquemàticament el sistema descrit com un sistema vibratori d'un grau de llibertat amb moviment vertical.

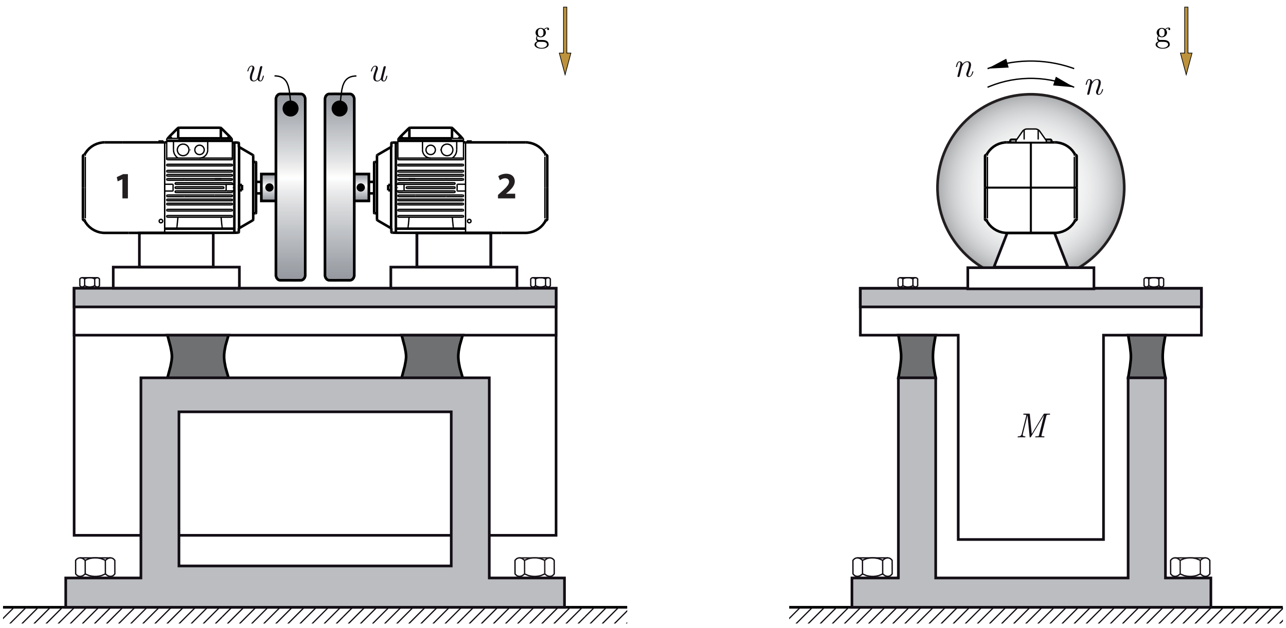
Determineu:

b) L'equació del moviment vertical $y(t)$ del sistema, la freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmorteïment ζ.

c) L'amplitud y_p de les oscil·lacions verticals que s'estableixen en el règim estacionari.

d) L'amplitud F_Tp de la força transmesa a terra.

Es considera que els valors y_p i F_Tp obtinguts són massa elevats i es desitja limitar-los a $y_\mathrm{pmax} = 2$ mm i $F_\mathrm{Tpmax} = 1000$ N. Per aconseguir-ho es realitza el muntatge de la figura adjunta.



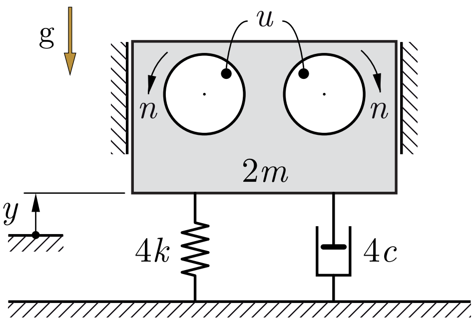
e) Feu les hipòtesis, convenientment justificades, que creieu adients i determineu el valor de la massa sísmica M que cal afegir i el valor de la rigidesa k_ad adequada per tal que es compleixin les especificacions requerides.

f) Si només es disposa del tipus d'elàstomers especificats, proposeu una solució factible i feu els càlculs de comprovació.

g) Creieu que faria falta algun tipus de subjecció en el pla horitzontal? Per què?

Solució Exercici

a) El sistema descrit es pot esquematitzar com un bloc amb moviment vertical $y(t)$, de massa $2m$ que recolza sobre el terra a través d'una molla de rigidesa $4k$ i un amortidor d'esmorteïment $4c$. El moviment $y(t)$ és provocat pels dos volants desequilibrats de desequilibri u. El seu esquema es mostra a la figura adjunta.



b) L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment a tot el sistema condueix a:

$2\ m\ \ddot{y} + 4\ c\ \dot{y} + 4\ k\ y = 2\ u\ \omega^2 \sin\left(\omega\ t\right)$, essent ω la velocitat angular dels volants.

La freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmorteïment ζ s'obtenen com:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\ k}{2\ m}} = 6{,}277\ \text{Hz}, \qquad \zeta = \frac{4\ c}{2\ \sqrt{4\ k\ 2\ m}} = 0{,}02817.$$

c) Tenint en compte que en règim estacionari el moviment vibratori és harmònic simple de freqüència $f = n/60$, l'amplitud y_p de les oscil·lacions verticals es pot obtenir a partir de la funció de resposta freqüencial que relaciona el desequilibri que provoca la vibració (pres com a entrada) i l'amplitud de la vibració (presa com a sortida). Aquesta funció es pot obtenir, per exemple, aplicant la transformada de Fourier a l'equació del moviment. En aquest cas:

$$\left(2\ m\left(\omega\ \text{j}\right)^2 + 4\ c\left(\omega\ \text{j}\right) + 4\ k\right)\boldsymbol{Y} = 2\ \boldsymbol{U}\omega^2$$

$$\boldsymbol{Y} = 2\ \boldsymbol{U}\ \frac{\omega^2}{2\ m\left(\omega\ \text{j}\right)^2 + 4\ c\left(\omega\ \text{j}\right) + 4\ k}$$

$$y_\text{p} = 2\ u\ \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(4\ k - 2\ m\omega^2\right)^2 + \left(4\ c\omega\right)^2}} = 4{,}743\ \text{mm}$$

d) L'amplitud F_{Tp} de la força transmesa a terra es pot obtenir a partir de l'amplitud de la força que provoca la vibració (força excitadora) i del factor de transmissió, o bé tenint en compte que la força transmesa a terra és la força dels elastòmers.

$$F_{\mathrm{Tp}} = 2\,u\,\omega^2 \frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} = 2\,u\,\omega^2 \frac{\sqrt{\left(4\,k\right)^2+\left(4\,c\omega\right)^2}}{\sqrt{\left(4\,k-2\,m\omega^2\right)^2+\left(4\,c\omega\right)^2}} = 1361\ \mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{Tp}} = y_{\mathrm{p}}\,\sqrt{\left(4\,k\right)^2+\left(4\,c\omega\right)^2} = 1361\ \mathrm{N}$$

e) Per tal de reduir, tant l'amplitud de la vibració y_{p} com la de la força transmesa F_{Tp} cal augmentar la raó de freqüències ρ, la qual cosa implica disminuir la freqüència pròpia f_0. Per aconseguir-ho es pot disminuir la rigidesa i/o augmentar la massa del sistema. Tenint en compte que l'esmorteïment és petit, en una primera aproximació se'n pot prescindir.

Per determinar M i k_{ad}, s'imposa tant per a l'amplitud de vibració com per a la de la força transmesa els valors màxims admissibles i es resol el sistema d'equacions:

$$y_{\mathrm{pmax}} = 2\,u \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(k_{\mathrm{ad}}-M'\omega^2\right)^2}}$$

$$F_{\mathrm{Tpmax}} = 2\,u\,\omega^2 \frac{\sqrt{\left(k_{\mathrm{ad}}\right)^2}}{\sqrt{\left(k_{\mathrm{ad}}-M'\omega^2\right)^2}}$$

La resolució d'aquest sistema porta als valors: $M' = 420{,}3$ kg i $k_{\mathrm{ad}} = 500$ N/mm. Això implica que la massa sísmica a afegir seria $M = M' - 2\,m = 240{,}3$ kg.

f) Si es suposa que només es disposa del tipus d'elastòmer especificat a l'enunciat, la rigidesa k_{ad} no es pot aconseguir, per la qual cosa es proposa augmentar-la fins a $k' = 560$ N/mm, que correspon a emprar 2 elastòmers en paral·lel en cadascun dels quatre recolzaments.

El fet d'augmentar el valor de la rigidesa fins a k' fa que no es compleixi cap de les dues especificacions: $y_{\mathrm{p}} = 2{,}012$ mm i $F_{\mathrm{Tp}} = 1127$ N. Cal doncs, mantenint el valor k', augmentar la massa fins a un valor $M'' = 480$ kg. En aquest cas, $y_{\mathrm{p}} = 1{,}749$ mm i $F_{\mathrm{Tp}} = 979{,}7$ N.

Si ara es té en compte que els elastòmers tenen esmorteïment les especificacions deixen de complir-se perquè el fet de considerar esmorteïment fa augmentar el factor de transmissió, per sobre de $\rho = \sqrt{2}$ com és el cas (y_p = 1,749 mm i F_Tp = 1012 N).

Cal doncs, tornar a augmentar la massa fins a un valor M'' = 490 kg. En aquest cas, y_p = 1,712 mm i F_Tp = 990,9 N.

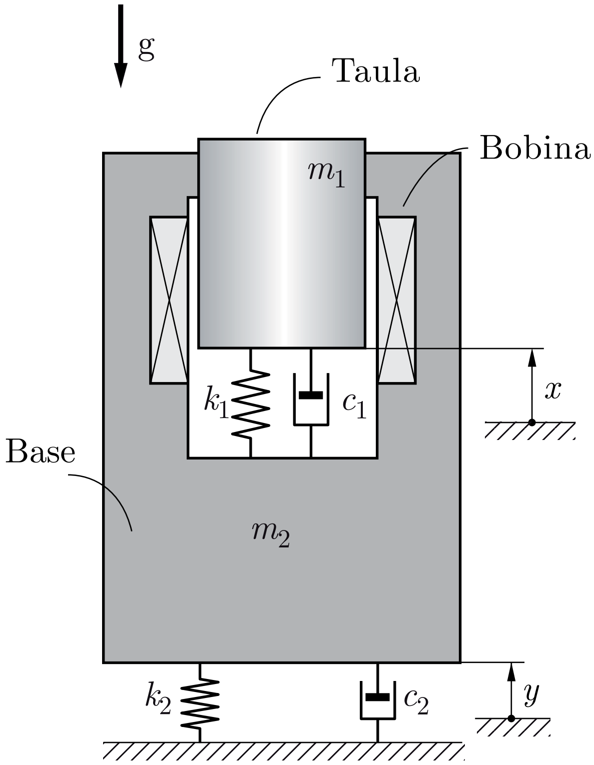
Si l'estabilitat del muntatge no es veu afectada, tenint en compte que cal augmentar la massa fins a M' = 420,3 kg per disminuir l'amplitud de vibració y_p, es pot pensar en disminuir la rigidesa del conjunt col·locant 2 elastòmers en sèrie en cadascun dels quatre recolzaments (k'' = 140 N/mm). En aquest cas, si no es té en compte l'esmorteïment y_p = 1,929 mm i F_Tp = 270,1 N i si es té en compte l'esmorteïment y_p = 1,929 mm i F_Tp = 277,9 N.

Per tant, com a possibles solucions es tenen:

- Augmentar la massa fins a 490 kg, la qual cosa implica que la massa sísmica ha de ser M = 310 kg i emprar 2 elastòmers en paral·lel a cadascun dels quatre recolzaments (k' = 560 N/mm).
- Augmentar la massa fins a 420,3 kg, la qual cosa implica que la massa sísmica ha de ser M = 240,3 kg i emprar 2 elastòmers en sèrie a cadascun dels quatre recolzaments (k'' = 140 N/mm). Aquesta solució queda condicionada a no afectar l'estabilitat del sistema.

g) Tenint en compte que el sistema de control garanteix el sincronisme dels motors i seguint l'esquema de l'apartat *a*), s'observa que l'acceleració en el pla horitzontal és nul·la i per tant no és necessària cap tipus de subjecció en aquest pla.

- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- La durada de l'examen és. **una hora per al test** i de **dues hores per al problema**.
- Material escrit: només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- Per entregar introduïu els fulls quadriculats i el material aprofitable en el sobre.
- Es pertinent el contingut del document **Pautes per a la realització de les proves escrites i per a l'avaluació** que es troba a Atenea.



$m_1 = 22$ kg	$k_1 = 33$ N/mm	$c_1 = 1{,}2$ N/(mm/s)
$m_2 = 250$ kg	$k_2 = 450$ N/mm	$c_2 = 10$ N/(mm/s)
$f = 75$ Hz	$a_\mathrm{p} = 3$ m/s^2	
$F_\mathrm{e} = 70$ N	$f_\mathrm{e} = 10$ Hz	

La figura mostra la fotografia i l'esquema d'un excitador de vibracions. La taula vibradora imantada de massa $m_1 = 22$ kg està unida a la base a través d'elements flexibles que es modelitzen com una molla de rigidesa $k_1 = 33$ N/mm i un amortidor de constant $c_1 = 1{,}2$ N/(mm/s). La base de massa $m_2 = 250$ kg disposa d'uns elements elàstics, de constants $k_2 = 450$ N/mm i $c_2 = 10$ N/(mm/s), que es poden bloquejar. Quan aquests elements es bloquegen la base queda fixada a terra. Per a l'anàlisi vibratòria del sistema entorn de la configuració d'equilibri, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \left\{x, y\right\}^\mathrm{T}$.

Amb la base fixada a terra, determineu:

a) La freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmorteïment ζ de la taula vibradora.

Un generador proporciona un senyal sinusoïdal de freqüència $f = 75$ Hz a la bobina fixa a la base la qual cosa excita el moviment vertical de la taula vibradora. Si l'amplitud de l'acceleració que s'estableix és $a_\mathrm{p} = 3$ m/s^2, determineu:

b) L'amplitud F_p de la força excitadora.

Per tal de poder realitzar assajos a freqüències inferiors es decideix desbloquejar els elements elàstics de la base. Determineu:

c) Les matrius d'inèrcia $\boldsymbol{M}$, de rigidesa $\boldsymbol{K}$ i d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$.

d) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$. Interpreteu els resultats.

e) L'esmorteïment dels modes propis ζ_i si se'n negligeix l'acoblament per esmorteïment.

Si la bobina introdueix una força $F(t)$, determineu:

f) L'expressió de la matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ si es pren com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$, que té per components els termes independents de les equacions del moviment, i com a sortida el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q}$.

g) Les amplituds de les acceleracions de la taula i de la base, $\ddot{x}_\mathrm{p}$ i $\ddot{y}_\mathrm{p}$ respectivament, en el règim estacionari, en funció dels components $\boldsymbol{H}_{ij}$ de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, si la força que introdueix la bobina és harmònica $F(t) = F_\mathrm{e}\cos(2\pi f_\mathrm{e}\cdot t)$. Particularitzeu els resultats per a $F_\mathrm{e} = 70$ N i $f_\mathrm{e} = 10$ Hz.

Solució

a) Amb la base fixada a terra, el sistema té un únic grau de llibertat que correspon al moviment de la taula vibradora respecte al terra. la freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment es determinen com:

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 6{,}164\ \mathrm{Hz} \qquad \text{i} \qquad \zeta = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1\,m_1}} = 0{,}7042.$$

b) En passar corrent per la bobina s'excita el moviment vertical de la taula vibradora. La relació entre el moviment en el règim estacionari i la força excitadora ve donada pel factor d'amplificació.

$$x_\mathrm{p} = \frac{F_\mathrm{p}}{k_1}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} \qquad \rightarrow \qquad a_\mathrm{p} = \frac{F_\mathrm{p}}{k_1}\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}$$

Així doncs, l'amplitud de la força excitadora s'obté com:

$$F_\mathrm{p} = a_\mathrm{p}\,\frac{k_1}{\omega^2}\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2} \quad \text{essent} \quad \rho = \frac{f}{f_0}$$

Substituint els valors numèrics s'obté: $F_\mathrm{p} = 66{,}00$ N.

c) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment es poden trobar a partir de les expressions de l'energia cinètica, de l'energia potencial i de la potència de les forces no conservatives.

L'energia cinètica E_c del sistema és la suma de l'energia cinètica de la taula vibradora més la de la base.

$$E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c\,taula} + E_\mathrm{c\,base} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{y}^2 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 250 \end{pmatrix}\mathrm{kg}$$

Prenent l'origen de l'energia potencial E_p a la posició d'equilibri, l'energia potencial només és l'associada a les forces de les molles.

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k_1\left(x-y\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\,y^2$$

Els elements de la matriu de rigidesa $\boldsymbol{K}$ són: $k_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 E_\mathrm{p}}{\partial\,q_i\ \partial\,q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_\mathrm{eq}}$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -33 \\ -33 & 483 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

La matriu d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$ s'obté de l'expressió de la potència de les forces no conservatives, $P_{\text{nc}} = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la coordenada q_i i $c_{ij} = -\partial Q_i / \partial \dot{q}_j \big|_{\boldsymbol{q}_{\text{eq}}, \dot{\boldsymbol{q}}=0}$.En aquest cas:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & -1,2 \\ 1,2 & 11,2 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N/(m/s)}$$

Alternativament, les matrius es poden trobar a partir de les equacions de moviment obtingudes, per exemple, aplicant el teorema de la quantitat de moviment a la taula i a la base.

$$m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} - c_1 \dot{y} + k_1 x - k_1 y = 0$$

$$m_2 \ddot{y} + \left(c_1 + c_2\right) \dot{y} - c_1 \dot{x} + \left(k_1 + k_2\right) y - k_1 x = 0$$

Amb les matrius $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{C}$ l'equació matricial del moviment lliure a l'entorn de la configuració d'equilibri és

$$\boldsymbol{M} \, \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C} \, \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad [1]$$

d) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$ s'obtenen diagonalitzant la matriu dinàmica $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$. En funció dels valors propis λ_i, les freqüències pròpies són: $f_{0i} = \sqrt{\lambda_i} / \left(2\pi\right)$. La forma de vibrar associada al mode propi de freqüència pròpia f_{0i} queda descrita pel vector propi $\boldsymbol{p}_i$ associat al valor propi λ_i.

$$f_{01} = \sqrt{\lambda_1} / \left(2\,\pi\right) = 5,562 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_1 = \left\{5,384, \ 1\right\}^{\text{T}} \text{ m}$$
$$f_{02} = \sqrt{\lambda_2} / \left(2\,\pi\right) = 7,483 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{-2,111, \ 1\right\}^{\text{T}} \text{ m}$$

El primer mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 5,562 Hz en el qual la taula i la base es mouen en fase i amb una relació d'amplituds de $x/y = 5{,}384$.

El segon mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 7,483 Hz en el qual la taula i la base es mouen en contrafase i amb una relació d'amplituds de $x/y = -2{,}111$.

En ambdós modes propis, el moviment de la taula és superior al moviment de la base, cosa lògica si es té en compte la relació de masses dels dos elements.

e) Si es pren la matriu $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$, que té per columnes els vectors propis de la matriu dinàmica $\boldsymbol{D}$, i a l'equació matricial del moviment lliure [1] es fa el canvi a coordenades modals, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}\,\xi$, i es premultiplica per $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, s'obté:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\,\ddot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\,\dot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\,\xi = \boldsymbol{0}$$

Les matrius $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}$ són diagonals.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 887{,}615 & 0 \\ 0 & 348{,}022 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1{,}084 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 769346 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

La matriu $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ només és diagonal en casos particulars com en el d'esmorteïment proporcional o esmorteïment de Rayleigh, on la matriu $\boldsymbol{C}$ és una combinació lineal d'$\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{K}$. En aquest cas

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 33058{,}5 & -6363{,}64 \\ -6363{,}64 & 21612{,}6 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

Els termes diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ descriuen l'esmorteïment directament associat a cada coordenada modal ξ_i, i per tant a cada mode propi. Amb aquestes consideracions, negligint l'acoblament per esmorteïment, la raó d'esmorteïment de cada mode és:

$$\zeta_i = \frac{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \zeta_1 = 0{,}5328 \\ \zeta_2 = 0{,}6604 \end{array}$$

En un sistema lliure, els modes propis descriuen moviments que ni la inèrcia ni la rigidesa del sistema acoblen o fan dependents. Els termes no diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ són els causants de l'acoblament per esmorteïment dels modes propis.

f) Les equacions del moviment [1] corresponen al sistema lliure o autònom, sense elements que originen forces o parells funció del temps. L'efecte d'aquestes forces s'inclou en l'equació del moviment amb el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ que s'obté de l'expressió de la potència de les forces o parells que generen. $P = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la coordenada q_i i és la component e_i del vector d'excitació.

En aquest cas, el vector d'excitació ve donat per $\boldsymbol{e} = \left\{ F(t), -F(t) \right\}^{\mathrm{T}}$ i l'equació matricial del moviment és

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} \qquad [2]$$

La matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ prenent com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ i com a sortida el moviment descrit amb el vector $\boldsymbol{q}$ s'obté fent la transformada de Fourier de l'equació matricial del moviment [2].

$$\left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2 + \boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}(\omega)\,\boldsymbol{E} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{H}(\omega) = \left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2 + \boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right)^{-1}$$

g) Anomenant $\boldsymbol{H}_{ij}$ les components de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, la Transformada de Fourier del moviment alternatiu de la taula i de la base a causa de la component variable de la força F_e –excitació– ve donat per:

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{H}_{11} - \boldsymbol{H}_{12}\right)\boldsymbol{F}; \qquad \boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{21}\right)\boldsymbol{F}$$

En règim estacionari el moviment alternatiu de la taula i la base és: harmònic de la mateixa freqüència que l'excitació, d'amplitud igual a l'amplitud de l'excitació multiplicada pel mòdul de la resposta freqüencial a la freqüència d'excitació i desfasada respecte a l'excitació un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència d'excitació. En resum

$$x(t) = \left|\boldsymbol{H}_{11}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right) - \boldsymbol{H}_{12}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right| F \cos\left(2\pi f_\mathrm{e}\, t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{11}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right) - \boldsymbol{H}_{12}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right]\right)$$
$$y(t) = \left|\boldsymbol{H}_{21}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right) - \boldsymbol{H}_{22}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right| F \cos\left(2\pi f_\mathrm{e}\, t + \arg\left[\boldsymbol{H}_{21}\left(2\pi f_1\right) - \boldsymbol{H}_{22}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right]\right)$$

Per tant, les amplituds de les acceleracions de la taula i de la base $\ddot{x}_\mathrm{p}$ i $\ddot{y}_\mathrm{p}$ vénen donades per:

$$\ddot{x}_\mathrm{p} = \left(2\pi f_\mathrm{e}\right)^2 x_\mathrm{p} = \left(2\pi f_\mathrm{e}\right)^2 \left|\boldsymbol{H}_{11}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right) - \boldsymbol{H}_{12}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right| F = 2{,}731\ \mathrm{m/s^2}$$
$$\ddot{y}_\mathrm{p} = \left(2\pi f_\mathrm{e}\right)^2 y_\mathrm{p} = \left(2\pi f_\mathrm{e}\right)^2 \left|\boldsymbol{H}_{21}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right) - \boldsymbol{H}_{22}\left(2\pi f_\mathrm{e}\right)\right| F = 0{,}2870\ \mathrm{m/s^2}$$

VIBRACIONS MECÀNIQUES **240IME21** **CURS 2018-2019**

ETSEIB **27 de juny de 2019** **Permutació: 0**

1 El nivell de vibració, en valor eficaç, en un punt d'un taller en el qual hi ha tres màquines iguals és de 82 dB, referits a 10^{-6} mm/s. Es desitja instal·lar una quarta màquina idèntica a les que ja hi ha. Suposant que les vibracions que produeixen les màquines són descorrelades, quin serà el nivell de vibració en valor eficaç en el mateix punt del taller quan s'hi instal·li la quarta màquina?

A 89,27 dB

B 84,88 dB

C 83,25 dB

D 98,74 dB

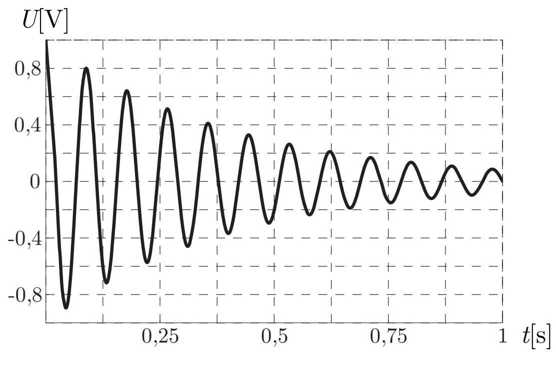
2 Per mesurar la vibració que es produeix en un punt d'una estructura, s'empra una cadena de mesura composta d'un acceleròmetre, de sensibilitat $s_\mathrm{a} = 9{,}7$ mV/(m/s^2), un amplificador de senyal, de guany g_a ajustable a intervals de 10 dB, i un integrador, de constant $g_\mathrm{i} = 10$ s^{-1}. Si la sensibilitat total de la cadena de mesura és $s_\mathrm{T} = 3{,}067$ V/(m/s) el guany g_a de l'amplificador és:

A 10 dB

B 20 dB

C 30 dB

D 40 dB



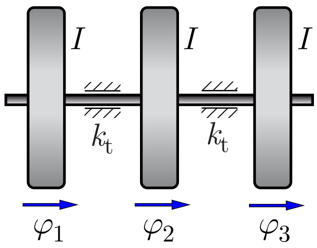
3 En un experiment de vibracions lliures d'un sistema, modelitzat com lineal d'un grau de llibertat, s'ha obtingut el gràfic de la figura que correspon a la vibració d'un punt del sistema. La raó d'esmorteïment d'aquest sistema aproximadament és:

A 0,04

B 0,4

C 0,02

D 0,2



4 El sistema de la figura està format per tres rotors iguals fixats en un arbre de secció constant. Els modes propis vibratoris del sistema, amb les seves components expressades en rad, són:

A $\boldsymbol{p}_1 = \left\{1,\, 0,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{1,\, -2,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$

B $\boldsymbol{p}_1 = \left\{-1,\, 0,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{1,\, -3,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$

C $\boldsymbol{p}_1 = \left\{1,\, 0,\, -1\right\}^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{1,\, -2,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$

D $\boldsymbol{p}_1 = \left\{1,\, 0,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{1,\, -4,\, 1\right\}^{\mathrm{T}}$

5 En un sistema de paràmetres constants i esmorteïment no nul hi actua una força sinusoïdal de freqüència f. Es mesura la vibració en un punt del sistema i en fer-ne una anàlisi espectral es troba que la vibració està formada per famílies harmòniques de diferents freqüències. Què es pot deduir d'aquest fet?

A El sistema és no lineal.

B El sistema té més d'un grau de llibertat.

C El sistema és no lineal i amb tants graus de llibertat com famílies harmòniques té la vibració.

D El sistema és lineal però amb esmorteïment elevat.

6 En un sistema lineal d'un grau de llibertat de freqüència pròpia $f_0 = 25$ Hz i raó d'esmorteïment $\zeta = 0{,}02$, quant temps triguen les vibracions lliures a reduir la seva amplitud a la dècima part?

A 0,3183 s

B 1,466 s

C 2,303 s

D 0,7329 s

7 Un sistema modelitzat com lineal i d'un grau de llibertat recolza, a través d'un aïllament elàstic, sobre el terra que té un moviment vibratori de freqüència $f = 10$ Hz. La freqüència pròpia del sistema és $f_0 = 8$ Hz i la raó d'esmorteïment és $\zeta = 0{,}1$. Es considera que l'amplitud de vibració del sistema és excessiva i per reduir-la es proposa duplicar la rigidesa del sistema. La relació entre la nova amplitud de vibració del sistema i la inicial serà aproximadament:

A 0,8186

B 1,222

C 1,158

D 2,389

8 S'han realitzat dos experiments en un sistema modelitzat com d'un grau de llibertat i lineal. S'ha obtingut que la rigidesa és $k = 2{,}5$ N/mm, la freqüència pròpia és $f_0 = 60$ Hz i el màxim de la seva admitància és $Y_{\mathrm{max}} = 500$ (mm/s)/N. La raó d'esmorteïment del sistema és:

A 0,1508

B 0,0151

C 0,3016

D 0,0302

9 Un metre d'un tipus de corda elàstica té una rigidesa a tracció $k = 250$ N/mm. La rigidesa a tracció d'una longitud de 4 m d'aquesta corda és:

A 250 N/mm

B 125 N/mm

C 1000 N/mm

D 62,5 N/mm

10 En un sistema d'un grau de llibertat que funciona en règim autoexcitat, l'energia aportada i dissipada per cicle en funció de l'amplitud de vibració x_p són:

$$E_\mathrm{aportada} = \begin{Bmatrix} 0 & x \le x_0 \\ b(x - x_0) & x > x_0 \end{Bmatrix} \text{ amb } x_0 = 1,5 \text{ mm i } b = 150 \cdot 10^3 \mathrm{J/m}$$
$$E_\mathrm{dissipada} = a\,x^2 \qquad \text{amb } a = 15 \cdot 10^6 \ \mathrm{J/m^2}$$

L'amplitud del cicle estable que s'estableix és:

A 1,838 mm

B 8,162 mm

C 1,5 mm

D 3,675 mm

COMPROVEU QUE COINCIDEIX EL NÚMERO DE LA PERMUTACIÓ DEL TEST AMB EL NÚMERO DEL FULL DE MARQUES ÒPTIQUES.

Full de respostes

Vibracions Mecàniques

27 de juny de 2019

P	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	C	A	C	A	C
2	C	B	B	C	C
3	A	B	C	D	B
4	C	C	A	C	B
5	A	B	D	D	D
6	D	D	A	B	A
7	D	D	D	D	B
8	A	A	A	B	A
9	D	D	C	C	A
10	B	A	D	B	C