



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions mecàniques

Descomposició modal

Anàlisi real i complexa

Joaquim M. Veciana

Salvador Cardona

2008



Departament d'Enginyeria Mecànica

Vibracions mecàniques. Descomposició modal. Anàlisi real i complexa

Primera edició Juny 2008

© Els autors, 2008

Edita: Salvador Cardona Foix

I.S.B.N.: 978-84-691-4349-0

Dipòsit Legal: B-29208-2008

Són rigurosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

1 Introducció

La teoria de la descomposició modal proposa que les respostes $x_i(t)$ que té un sistema lineal de n graus de llibertat lliures a un senyal d'entrada determinat $y(t)$, és igual a una suma ponderada i, si escau, ajustada en fase, de respostes $\zeta_i(t)$ a uns senyals d'entrada ε_i que tindrien n sistemes lineals d'un sol grau de llibertat lliure. Així, per exemple, la resposta del sistema de la Figura 1.1, de dos graus de llibertat lliures, es pot estudiar com la superposició de dues respostes, cada una d'un sistema d'un sol grau de llibertat lliure, com el de la Figura 1.2.

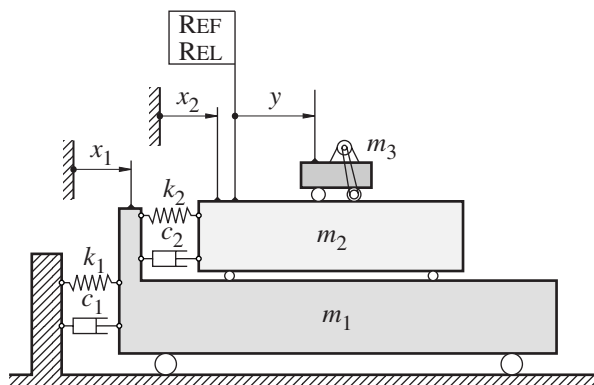


Figura 1.1 Sistema de dos graus de llibertat lliures

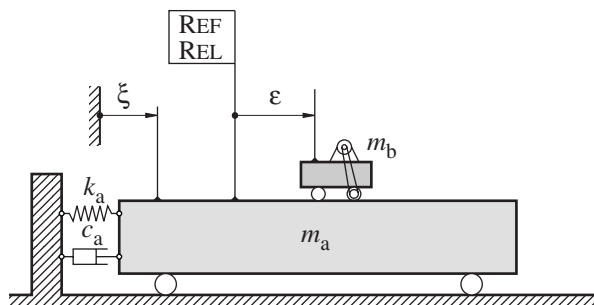


Figura 1.2 Sistema d'un grau de llibertat lliure

La descomposició modal es pot dur a terme per mitjà de dues metodologies d'anàlisi: l'anàlisi amb variable real, que en general comporta la simplificació de suposar negligible l'acoblament per esmoreïment entre els modes propis involucrats, i l'anàlisi amb variable complexa, que resulta més laboriós, però sí té en compte aquest acoblament.

2 Descomposició modal real

2.1 Sistema d'equacions desacoblat. Matriu dinàmica

Les equacions de moviment d'un sistema de n graus de llibertat lliures es poden expressar, en forma matricial, segons:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Es defineix la matriu dinàmica segons $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Diagonalitzant aquesta matriu, s'obtenen n valors propis λ_i , a partir dels quals s'obtenen les corresponents freqüències pròpies f_{0i} (pulsacions pròpies ω_{0i}) segons (2.2), i els corresponents n vectors propis \mathbf{p}_i .

$$f_{0i} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$
$$\omega_{0i} = \sqrt{\lambda_i}$$

Si l'esmoreïment del sistema és negligible ($\mathbf{C}=0$), es pot obtenir un sistema d'equacions desacoblat amb unes noves coordenades ξ_i , anomenades coordenades modals o pròpies. L'expressió (2.3) mostra el canvi de base que relaciona les coordenades modals i les coordenades geomètriques. La matriu \mathbf{P} està formada pels vectors propis \mathbf{p}_i disposats en columna.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} \quad (2.3)$$

Així doncs, l'evolució temporal de cadascuna de les coordenades modals o pròpies $\xi_i(t)$ descriu el moviment del sistema segons:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \xi_i(t) \quad (2.4)$$

Per tant, el vector propi \mathbf{p}_i descriu el mode propi o manera pròpia de moure's del sistema, associat a la coordenada modal ξ_i .

Aplicant el canvi de base (2.3), el sistema d'equacions (2.1) sense esmoreïment s'expressa segons:

$$\mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(t) \quad (2.5)$$

D'altra banda, si \mathbf{M} i \mathbf{K} són simètriques, tal com es prenen en el plantejament de les equacions de Lagrange, es demostra que les matrius $\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$ i $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ són diagonals. Per tant, multiplicant el sistema (2.5) per la matriu \mathbf{P} transposada, s'obté un sistema d'equacions desacoblat segons:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) \quad (2.6)$$



Quan l'escorment no és negligible, la matriu de canvi de base permet diagonalitzar la matriu C si aquesta és una combinació lineal de les matrius M^α i K^β (quan α i β són la unitat, l'escorment s'anomena proporcional o de Rayleigh). En general, aquesta condició no es compleix i, per tant, la descomposició modal s'hauria de analitzar emprant equacions d'estat i valors i vectors propis complexos.

En la majoria dels casos, però, s'acostuma a fer la hipòtesi que l'acoblament per escorment és negligible. Es simplifica, llavors, la matriu d'escorments per poder ser diagonalitzada amb el canvi de base indicat a l'expressió (2.3). Això implica fer nuls els termes de fora de la diagonal de la matriu resultant del producte $P^T C P$. Aquesta aproximació, en general, dona uns resultats prou acceptables, sempre i quan l'acoblament per escorment no tingui un pes excessiu. S'anomena $P^T C P|_s$ a aquest producte simplificat.

Amb l'aproximació descrita, i a partir del sistema d'equacions (2.1), es pot escriure un sistema d'equacions desacoblat que inclou escorment segons:

$$P^T M P \ddot{\xi} + P^T C P|_s \dot{\xi} + P^T K P \xi = P^T f(t) \quad (2.7)$$

Cada una de les n equacions de (2.7) descriu conceptualment el comportament d'un sistema d'un grau de llibertat lliure, amb una equació de moviment que pren la forma:

$$m_i \ddot{\xi}_i + c_i \dot{\xi}_i + k_i \xi_i = g_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

A partir d'aquestes equacions es poden trobar les raons d'escorment modal segons:

$$\zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i \cdot k_i}} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Si la raó d'escorment d'alguns dels modes propis és $\zeta_i < 1$, el moviment lliure del sistema segons la coordenada modal i -èsima tindrà un comportament vibratori, amb una freqüència d'oscil·lació:

$$f_{di} = f_{0i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (2.10)$$

Exemple

En l'exemple de la Figura 1.1, les equacions de moviment, en forma matricial, queden segons l'expressió:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3 \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Es suposen els valors dels diferents paràmetres segons:



$$\begin{aligned}
m_1 &= 150 \text{ kg}; & m_2 &= 95 \text{ kg}; & m_3 &= 0,75 \text{ kg} \\
c_1 &= 1500 \text{ N/(m/s)}; & c_2 &= 2100 \text{ N/(m/s)} \\
k_1 &= 15,5 \times 10^3 \text{ N/m}; & k_2 &= 12,0 \times 10^3 \text{ N/m}
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

En el següent desenvolupament totes les unitats no indicades són unitats del S.I. La matriu \mathbf{D} que s'obté és:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 183,33 & -80,0 \\ -125,33 & 125,33 \end{bmatrix}
\tag{2.13}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 50,08 \text{ s}^{-2}; & \lambda_2 &= 258,58 \text{ s}^{-2} \\
f_{01} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{50,08} = 1,126 \text{ Hz}; & f_{02} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{258,58} = 2,559 \text{ Hz} \\
\mathbf{p}_1 &= \{0,5147 \quad 0,8574\}^T; & \mathbf{p}_2 &= \{0,7284 \quad -0,6851\}^T
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

La matriu \mathbf{P} , que té per columnes els vectors propis \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 , és:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,5147 & 0,7284 \\ 0,8574 & -0,6851 \end{bmatrix}
\tag{2.15}$$

Si es suposa, en primera aproximació, que no hi ha acoblament per esmorteïment:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 110,12 & 0 \\ 0 & 124,54 \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \Big|_s &= \begin{bmatrix} 643,94 & \cancel{-454,62} \\ \cancel{-454,62} & 4991,98 \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 5515,37 & 0 \\ 0 & 32202,0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Llavors, el sistema d'equacions desacoblat queda segons:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 110,12 & 0 \\ 0 & 124,54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 643,94 & 0 \\ 0 & 4991,98 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5515,37 & 0 \\ 0 & 32202,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \\
= \begin{Bmatrix} -0,8574 \cdot 0,75 \cdot \ddot{y} \\ 0,7284 \cdot 0,75 \cdot \ddot{y} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

A partir d'aquest sistema, s'obtenen les raons d'esmorteïment modal:



$$\zeta_1 = \frac{643,94}{2\sqrt{110,12 \cdot 5515,37}} = 0,4131$$

$$\zeta_2 = \frac{4991,98}{2\sqrt{124,54 \cdot 32202,0}} = 1,2464$$
(2.18)

Segons aquestes raons d'esmoreïment, només el primer mode té comportament vibratori. La freqüència d'oscil·lació d'aquest mode és:

$$f_{d1} = 1,126\sqrt{1 - 0,4131^2} = 1,026 \text{ Hz}$$
(2.19)

2.2 Resposta impulsional

En un sistema lineal, la resposta temporal $x(t)$ a una excitació arbitrària $y(t)$ es pot avaluar, entre altres, per mitjà de la integral de convolució també anomenada integral de Duhamel o integral de Green:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) y(\tau) d\tau$$
(2.20)

En (2.20) la funció $h(t)$ correspon a la resposta impulsional del sistema, que es defineix com el quocient entre la resposta a un impuls, a partir de condicions inicials nul·les, i la magnitud d'aquest.

La resposta impulsional d'un sistema es pot avaluar a partir de la resposta d'aquest a una excitació $y(t)$, corresponent a un impuls de magnitud unitària $\delta(t)$, que dona lloc a un vector d'excitació $\mathbf{f}(t)$. Aquest vector d'excitació es transforma a coordenades modals per mitjà de $\mathbf{P}^T \mathbf{f}(t)$ i, per tant, si les components del vector \mathbf{f} són funcions lineals de $y(t)$, les excitacions modals seran també impulsos, tot i que no necessàriament de magnitud unitària.

Per a cada un dels sistemes d'un grau de llibertat que descriu conceptualment cada una de les equacions desacoblades (2.8), la resposta a un impuls, prenent com a origen de temps l'instant en què acaba aquest, correspon al moviment lliure del sistema. Aquesta resposta es descriu per mitjà de la solució de l'equació homogènia de cada una de les equacions diferencials esmentades.

Equació característica amb arrels reals diferents

Si per a una de les equacions (2.8) les solucions de l'equació característica γ_1 i γ_2 són reals i diferents (cas que es dona quan l'esmoreïment és supercrític, $\zeta > 1$), es pot prendre com a conjunt de solucions fonamentals $e^{\gamma_1 t}$ i $e^{\gamma_2 t}$. Per tant, per a la coordenada modal corresponent, la solució de l'equació homogènia és:

$$\xi(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$
(2.21)



on C_1 i C_2 són constants que depenen de les condicions inicials del moviment. En aquest cas γ_1 i γ_2 són, en funció de la raó d'escoriment i de la pulsació pròpia:

$$\gamma_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.22)$$

Equació característica amb arrels reals iguals

En el cas particular que $\gamma_1 = \gamma_2$ (cas que es dona quan l'escoriment és crític, $\zeta = 1$), la solució de l'equació homogènia és:

$$\xi(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\gamma_1 t} \quad (2.23)$$

on C_1 i C_2 són constants que depenen de les condicions inicials del moviment. En aquest cas $\gamma_1 = \gamma_2$ són, en funció de la raó d'escoriment i de la pulsació pròpia:

$$\gamma_{1,2} = -\zeta \omega_0 \quad (2.24)$$

Equació característica amb arrels complexes

Si les solucions de l'equació característica γ_1 i γ_2 són complexes (cas que es dona quan l'escoriment és subcrític, $\zeta < 1$), aquestes són conjugades entre sí: $\gamma_1 = \alpha + j\beta$ i $\gamma_2 = \alpha - j\beta$. Llavors, es pot prendre com a conjunt de solucions fonamentals $e^{\alpha t} \cos \beta t$ i $e^{\alpha t} \sin \beta t$. Per tant, la solució de l'equació homogènia en aquest cas és:

$$\xi(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad (2.25)$$

on C i φ són constants que depenen de les condicions inicials del moviment. En aquest cas, α i β són, en funció de la raó d'escoriment, de la pulsació pròpia i de la d'oscil·lació:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\zeta \omega_0 \\ \beta &= \omega_d \end{aligned} \quad (2.26)$$

Exemple

Continuant amb l'exemple anterior, les expressions que descriuen el moviment lliure del primer i del segon mode propi, ateses les raons d'escoriment, són la (2.25) i la (2.21), respectivament. Si es formulen aquestes respostes en forma de velocitat, resulten les expressions:

$$\dot{\xi}_1(t) = C \omega_{d1} e^{-\zeta_1 \omega_{01} t} \cos(\omega_{d1} t + \varphi + \psi_1) \quad (2.27)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = C_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 t} \quad (2.28)$$



amb

$$\psi_1 = \arctan \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\zeta_2 \omega_{02} + \omega_{02} \sqrt{\zeta_2^2 - 1} \\ \gamma_2 &= -\zeta_2 \omega_{02} - \omega_{02} \sqrt{\zeta_2^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Segons les equacions de moviment en coordenades geomètriques (2.1), el terme independent, que correspon a l'entrada del sistema de la Figura 1.1, queda descrit segons:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3 \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Transformant a coordenades modals ζ_i , amb la matriu \mathbf{P}^T i substituint el valor de m_3 , el vector d'excitació (2.31) queda de la forma:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} -0,8574 \cdot 0,75 \cdot \ddot{y}(t) \\ 0,7284 \cdot 0,75 \cdot \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Per tant, si es pren un impuls d'acceleració de magnitud unitària, $\ddot{y}(t) = 1[m/s] \delta(t)[s^{-1}]$, com a excitació d'entrada, l'excitació modal equivalent queda com:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} -0,8574 \cdot 0,75 \cdot \delta(t) \\ 0,7284 \cdot 0,75 \cdot \delta(t) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Per a l'entrada descrita i per a cada mode propi, les condicions inicials de les coordenades pròpies són (en unitats del S.I.):

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= 0; \quad \dot{\xi}_1(0) = -\frac{0,8574 \cdot 0,75}{110,12} = -0,005839 \\ \xi_2(0) &= 0; \quad \dot{\xi}_2(0) = \frac{0,7284 \cdot 0,75}{124,54} = 0,004126 \end{aligned} \quad (2.34)$$

i l'angle $\psi_1 = 0,4259$ rad.

Les respostes impulsionalen en coordenades modals queden, en forma de velocitat:

$$\begin{aligned} h_{\xi_1}(t) &= -6,41 \times 10^{-3} e^{-2,92t} \cos(6,44t + 0,4259) \\ h_{\xi_2}(t) &= -1,39 \times 10^{-3} e^{-8,08t} + 5,52 \times 10^{-3} e^{-32,01t} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les respostes impulsionalen $h_1(t)$ i $h_2(t)$ corresponents a les velocitats, en coordenades geomètriques, es poden expressar per mitjà del canvi de coordenades (2.3), segons:



$$\begin{aligned}h_1(t) &= 0,5147 h_{\zeta_1}(t) + 0,7284 h_{\zeta_2}(t) \\h_2(t) &= 0,8574 h_{\zeta_1}(t) - 0,6851 h_{\zeta_2}(t)\end{aligned}\tag{2.36}$$

i substituint les expressions (2.35) resulten:

$$\begin{aligned}h_1(t) &= -3,30 \times 10^{-3} e^{-2,92t} \cos(6,44t + 0,4259) - 1,01 \times 10^{-3} e^{-8,08t} + 4,02 \times 10^{-3} e^{-32,01t} \\h_2(t) &= -5,50 \times 10^{-3} e^{-2,92t} \cos(6,44t + 0,4259) + 0,95 \times 10^{-3} e^{-8,08t} - 3,78 \times 10^{-3} e^{-32,01t}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Aquestes respostes impulsional són adimensionals ja que la resposta a l'impuls d'acceleració té, en aquest cas, unitats de velocitat i la magnitud de l'impuls també.



3 Descomposició modal complexa

3.1 Equacions d'estat

Quan l'acoblament per esmorteïment no es pot negligir i per tant no es pot fer la simplificació esmentada en l'apartat anterior, el sistema no es pot diagonalitzar. Si es vol disposar dels avantatges que presenta la diagonalització, cal passar a una descripció del comportament del sistema per mitjà d'equacions d'estat per realitzar posteriorment una diagonalització que porta a una descomposició modal utilitzant valors i vectors propis reals i/o complexos.

Amb aquest mètode, el sistema de n equacions de moviment de segon ordre, definit per (2.1) es converteix en un sistema de $2n$ equacions de primer ordre anomenades equacions d'estat. Partint de l'expressió de l'acceleració, i tenint en compte l'existència de M^{-1} en sistemes ben condicionats, s'obté:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -M^{-1}C \dot{\mathbf{x}} - M^{-1}K \mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

Aquest sistema es pot reescriure amb el vector d'estat \mathbf{z} , com l'equació d'estat:

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \quad (3.2)$$

on

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}\mathbf{f}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La resposta lliure del sistema queda descrita per la solució homogènia del sistema d'equacions (3.2), es a dir, per la solució de:

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} \quad (3.4)$$

Per a un sistema com (3.4) existeixen $2n$ solucions reals linealment independents, $[\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_{2n}(t)]$, que constitueixen un conjunt fonamental de solucions. La matriu formada per aquestes s'anomena matriu fonamental.

La solució homogènia del sistema es pot escriure llavors com una combinació lineal de les solucions expressades en el conjunt fonamental, segons:

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathbf{z}_1(t) + C_2\mathbf{z}_2(t) + \dots + C_{2n}\mathbf{z}_{2n}(t) \quad (3.5)$$

3.2 Mètode dels valors i vectors propis

Un dels mètodes per trobar un conjunt fonamental es basa en l'obtenció dels valors i vectors propis de la matriu A . Es demostra que si \mathbf{p}_i és un vector propi (real o complex)



de la matriu A , i λ_i el valor propi associat (real o complex), l'expressió $e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i$ constitueix una solució del sistema (3.4). En efecte, si $\mathbf{z}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i$ es pot escriure:

$$\begin{aligned}\lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i &= A e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i \\ \lambda_i \mathbf{p}_i &= A \mathbf{p}_i\end{aligned}\quad (3.6)$$

Això és equivalent a dir que \mathbf{p}_i és un vector propi de la matriu A i λ_i el valor propi associat.

Es demostra que si A té $2n$ vectors propis linealment independents $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{2n}$, associats a $2n$ valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ no tenen per què ser diferents), llavors el conjunt de solucions $\mathbf{z}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i$ ($i=1, \dots, 2n$) constitueixen $2n$ solucions linealment independents del sistema (3.4).

Com que el conjunt fonamental de solucions ha d'estar constituït per un conjunt de solucions reals, l'obtenció d'aquest variarà segons els valors i vectors propis obtinguts siguin reals i/o complexos, i la seva multiplicitat.

Solucions reals obtingudes a partir de valors propis reals amb multiplicitat unitària

Si λ_i correspon a un valor propi real de la matriu A amb multiplicitat unitària, i \mathbf{p}_i és el vector propi associat, la solució $\mathbf{z}(t)$ real correspon directament a l'expressió:

$$\mathbf{z}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i \quad (3.7)$$

Cal remarcar que, en sistemes mecànics com el plantejat, l'obtenció d'un valor propi real de multiplicitat unitària implica l'obtenció d'un altre valor propi real també de multiplicitat unitària, els quals es poden associar a un mateix sistema d'un grau de llibertat lliure a què l'enunciat de la teoria de la descomposició modal es refereix, amb una raó d'esmoreïment superior a la unitat. Per tant, el nombre de valors i vectors propis reals de multiplicitat unitària serà parell.

En aquest cas, si λ_i i λ_{i+1} són els valors propis associats a un mode propi, la freqüència pròpia i la raó d'esmoreïment corresponents són:

$$\begin{aligned}f_{0i} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i \lambda_{i+1}} \\ \zeta_i &= -\frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_{i+1}}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Solucions reals obtingudes a partir de valors propis complexos amb multiplicitat unitària

Si $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ correspon a un valor propi complex de la matriu A amb multiplicitat unitària, i \mathbf{p}_i és el vector propi associat, l'expressió $e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i = \mathbf{z}_{1i}(t) + j\mathbf{z}_{2i}(t)$ és una solució



vectorial complexa de $\dot{z} = Az$, i es demostra que $z_{1i}(t)$ i $z_{2i}(t)$ són solucions reals independents del sistema (3.4). Les components $z_{1i}(t)$ i $z_{2i}(t)$ prenen la forma següent:

$$e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} p_i = e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_i] \left[\cos(\beta_i t + \arg[p_i]) + j \sin(\beta_i t + \arg[p_i]) \right] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} z_{1i}(t) &= e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_i] \cos(\beta_i t + \arg[p_i]) \\ z_{2i}(t) &= e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_i] \sin(\beta_i t + \arg[p_i]) \end{aligned} \quad (3.10)$$

on $\text{mod}[p_i]$ i $\arg[p_i]$ són, respectivament, el vector de mòduls i el vector d'arguments del vector propi p_i .

Cal remarcar que en sistemes mecànics com el plantejat, l'obtenció d'un valor propi complex i del seu vector propi associat implica l'obtenció del seus respectius valor i vector propi conjugats que donen lloc a les mateixes solucions fonamentals. Per tant, el nombre de valors i vectors propis complexos serà parell. Cada parella de valors propis conjugats $\alpha_i \pm j\beta_i$ correspon a un mode propi amb una raó d'esmoreïment inferior a la unitat (es a dir, presenta comportament vibratori). Les seves freqüència pròpia, freqüència d'oscil·lació i raó d'esmoreïment són:

$$\begin{aligned} f_{0i} &= \frac{1}{2\pi} |\lambda_i| \\ f_{di} &= \frac{1}{2\pi} \beta_i \\ \zeta_i &= -\frac{\alpha_i}{|\lambda_i|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En sistemes físics, habitualment s'agrupen les dues solucions que provenen de cada parella de vectors i valors propis conjugats. Suposant, per exemple, que $z_1(t)$ i $z_2(t)$ són solucions associades a una parella de vectors i valors propis conjugats,

$$\begin{aligned} C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) &= C_1 e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_1] \cos(\beta_1 t + \arg[p_1]) + \\ &C_2 e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_1] \sin(\beta_1 t + \arg[p_1]) = C_{c1} e^{\alpha_i t} \text{mod}[p_1] \cos(\beta_1 t + \arg[p_1] + \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

amb C_{c1} i φ_1 constants que depenen de les condicions inicials del sistema.

Solucions reals obtingudes a partir de valors propis amb multiplicitat superior a la unitat

Si el polinomi característic de la matriu A no té $2n$ arrels diferents, llavors tampoc té $2n$ vectors propis linealment independents de determinació immediata. La solució d'una equació diferencial escalar $\dot{z} = az$, correspon a una expressió del tipus $z(t) = ce^{at}$ on c és una constant qualsevol. Seria desitjable poder dir que la solució de l'equació diferencial vectorial (3.4), $\dot{z} = Az$, és del tipus $z(t) = e^{At}v$ per a qualsevol vector constant v . Tot i això, e^{At} no està definit encara que A sigui una matriu quadrada. Per a



resoldre el problema, es defineix e^{At} de manera que s'estableixi una analogia amb l'exponencial escalar e^{at} , per mitjà de la sèrie infinita següent:

$$e^{At} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^m t^m}{m!} + \dots \quad (3.13)$$

Es demostra que aquesta sèrie convergeix per a qualsevol valor de t i que es pot derivar terme a terme. En particular es compleix que:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \dots + \frac{\mathbf{A}^{m+1}}{m!} t^m + \dots = \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \dots + \frac{\mathbf{A}^m t^m}{m!} + \dots \right] = \mathbf{A} e^{At} \quad (3.14)$$

Això implica que $e^{At} \mathbf{v}$ és una solució de (3.4). Es pot demostrar que sempre es possible trobar $2n$ vectors linealment independents per als quals es pot sumar de manera exacta la sèrie infinita $e^{At} \mathbf{v}$. Es més, siguin quins siguin aquests $2n$ vectors linealment independents, ja es pot calcular $e^{At} \mathbf{v}$ de manera exacta. Per a l'obtenció de les solucions linealment independents del sistema es suggereix el següent algoritme, del qual es pot demostrar que sempre convergeix en un nombre de passos finit.

En primer lloc, es troben tots els valors propis de \mathbf{A} i els vectors propis linealment independents, de manera anàloga als casos anteriors.

A continuació, es pren un valor propi λ de \mathbf{A} i es troben tots els vectors \mathbf{v} per als quals es compleix $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = 0$ i $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} \neq 0$. Es demostra que, per a cada un d'aquests vectors, l'expressió (3.15) és una solució addicional de $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}$.

$$e^{At} \mathbf{v} = e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} [\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}] \quad (3.15)$$

Es repeteix aquesta operació, si cal, per a tots els valors propis de \mathbf{A} mentre no hi hagi suficients solucions linealment independents.

Un cop s'han emprat tots els valors propis de \mathbf{A} , si encara no hi ha prou solucions es busquen tots els vectors que compleixin $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^3 \mathbf{v} = 0$ i $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v} \neq 0$. Es demostra que, per a cada un d'aquests vectors, l'expressió (3.16) és una solució addicional de $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}$.

$$e^{At} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left[\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} + \frac{t^2}{2!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v} \right] \quad (3.16)$$

Es continua de la mateixa manera fins a trobar les $2n$ solucions linealment independents requerides.

La freqüència pròpia, la raó d'esmoreïment i, si escau, la freqüència d'oscil·lació de cada mode propi es troba amb expressions anàlogues als casos on la multiplicitat dels valors propis és unitària.



Exemple

Es continua amb l'exemple definit pel cas anterior, i es planteja el sistema d'equacions d'estat (tot en unitats del S.I.):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} \quad (3.17)$$

amb

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3 \ddot{z}_{rel} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Substituint els valors corresponents

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -183,33 & 80,0 & -24,0 & 14,0 \\ 125,33 & -125,33 & 21,93 & -21,93 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,007833 \ddot{z}_{rel} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Valors propis i vectors propis de \mathbf{A} :

$$\lambda_1 = -2,849 + j 6,671; \quad \mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} -0,01843 - j 0,07612 \\ -0,04394 - j 0,10288 \\ 0,56033 + j 0,09395 \\ 0,81152 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -2,849 - j 6,671; \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{Bmatrix} -0,01843 + j 0,07612 \\ -0,04394 + j 0,10288 \\ 0,56033 - j 0,09395 \\ 0,81152 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\lambda_3 = -7,523; \quad \mathbf{p}_3 = \begin{Bmatrix} 0,05170 \\ -0,12119 \\ -0,38894 \\ 0,91179 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\lambda_4 = -32,710; \quad \mathbf{p}_4 = \begin{Bmatrix} 0,01919 \\ -0,02378 \\ -0,62778 \\ 0,77779 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$



Per tant la solució homogènia del sistema plantejat es pot escriure segons:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= C_{c1} e^{-2,849t} \begin{Bmatrix} 0,07832 \\ 0,11187 \\ 0,56815 \\ 0,81152 \end{Bmatrix} \cos \left\{ 6,671t + \begin{Bmatrix} -1,80831 \\ -1,97442 \\ 0,16612 \\ 0 \end{Bmatrix} + \varphi_1 \right\} + \\ &+ C_2 e^{-7,523t} \begin{Bmatrix} 0,05170 \\ -0,12119 \\ -0,38894 \\ 0,91179 \end{Bmatrix} + C_3 e^{-32,710t} \begin{Bmatrix} 0,01919 \\ -0,02378 \\ -0,62778 \\ 0,77779 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La freqüència pròpia, la freqüència d'oscil·lació i la raó d'esmoreïment del primer mode propi (presenta comportament vibratori) són:

$$\begin{aligned} f_{01} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(-2,849)^2 + (6,671)^2} = 1,155 \text{ Hz} \\ f_{d1} &= \frac{1}{2\pi} 6,671 = 1,062 \text{ Hz} \\ \zeta_1 &= -\frac{-2,849}{\sqrt{(-2,849)^2 + (6,671)^2}} = 0,3928 \end{aligned} \quad (3.25)$$

La freqüència pròpia i la raó d'esmoreïment associats conceptualment al segon sistema d'un grau de llibertat lliure (no presenta comportament vibratori) són:

$$\begin{aligned} f_{02} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(-7,523)(-32,710)} = 2,497 \text{ Hz} \\ \zeta_2 &= -\frac{-7,523 - 32,710}{2\sqrt{(-7,523)(-32,710)}} = 1,2824 \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3 Resposta impulsional

Per trobar les constants de la solució homogènia, cal resoldre (3.24) per a unes condicions inicials determinades. Aquestes condicions inicials dependran del tipus de senyal d'entrada amb què s'exciti el sistema. Es troba la resposta impulsional avaluant el sistema $\dot{z} = Az + b$ quan el senyal d'entrada correspon a un impuls de magnitud unitària, $\ddot{y}(t) = 1[m/s] \delta(t)[s^{-1}]$:

Exemple

En l'exemple dels casos anteriors, quan l'excitació correspon a un impuls de magnitud unitària, el sistema d'equacions d'estat queda com (unitats en S.I.):



$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -183,33 & 80,0 & -24,0 & 14,0 \\ 125,33 & -125,33 & 21,93 & -21,93 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,007833\delta(t) \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Les condicions inicials, per a aquest cas, són:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,007833 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Si s'avalua la solució homogènia (3.24) per a $t=0$ (just després de l'impuls), fent servir les condicions inicials (3.28), s'obtenen les següents constants:

$$\begin{aligned} C_{c1} &= -6,114 \times 10^{-3}; & C_2 &= 2,296 \times 10^{-3} \\ C_3 &= -6,542 \times 10^{-3}; & \varphi_1 &= 0,22321 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Per tant, les respostes impulsional en coordenades geomètriques, en forma de velocitat, són:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= -3,474 \times 10^{-3} e^{-2,849t} \cos(6,671t + 0,389) - \\ & - 0,893 \times 10^{-3} e^{-7,523t} + 4,107 \times 10^{-3} e^{-32,710t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= -4,962 \times 10^{-3} e^{-2,849t} \cos(6,671t + 0,223) + \\ & + 2,094 \times 10^{-3} e^{-7,523t} - 5,088 \times 10^{-3} e^{-32,710t} \end{aligned}$$

Com ja s'ha explicat en l'apartat de descomposició modal real, aquestes respostes impulsional són adimensionals ja que la resposta a l'impuls d'acceleració té, en aquest cas, unitats de velocitat i la magnitud de l'impuls també.



4 Comparació de resultats: anàlisi real i complexa

Comparació de paràmetres:

	1r mode			2n mode	
	real	complex		real	complex
x_1	0,5147	0,5735		0,7284	–
x_2	0,8574	0,8192		0,6851	–
fase [°]	0	9,5178		180	–
f_0 [Hz]	1,126	1,155		2,559	2,497
ζ	0,4131	0,3928		1,2464	1,2824
f_d [Hz]	1,026	1,062		–	–

Comparació gràfica de respostes impulsional:

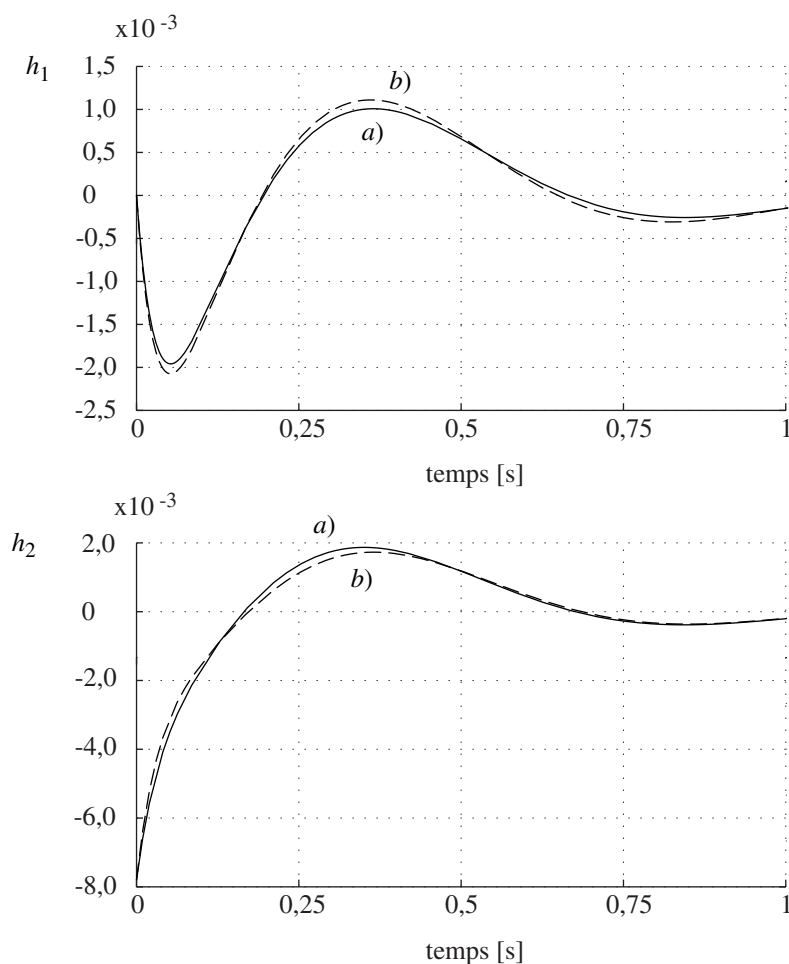


Figura 4.1 Respostes impulsional obtingudes per mitjà de la descomposició modal amb:
a) anàlisi real, i *b)* anàlisi complexa



5 Bibliografia

1. Braun, M. (1990), *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Mèxic: Grupo Editorial Iberoamèrica cop.
2. Thomson, W.T. (1983), *Teoria de Vibraciones. Aplicaciones*. Estats Units d'Amèrica: Prentice-Hall, Inc.
3. Veciana, J.M. (2007), *Reducció de Vibracions Residuals en Moviments Transitoris. Definició de Lleis de Moviment per mitjà de corbes B-Spline*. Espanya: Tesi doctoral. Universitat de Girona.
4. Zarevi, K., Phil, M. (1984), *Modal Analysis of Large Structures – Multiple Exciter Systems*. Dinamarca: Brüel & Kjær.

