



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

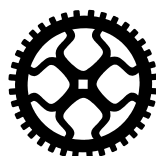
Vibracions Mecàniques

Descripció i anàlisi de magnituds en l'estudi de vibracions

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

2006



Departament d'Enginyeria Mecànica

Vibracions Mecàniques.
Descripció i anàlisi de magnituds en l'estudi de vibracions

Primera edició juliol 2006

© Els autors, 2006

Edita: Salvador Cardona i Foix

I.S.B.N.: 84-689-9728-5
Dipòsit Legal: B-35906-2006

Són rigurosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Índex

1	Descripció i anàlisi de magnituds en l'estudi de vibracions	5
1.1	Definicions	6
1.2	Classificació de les vibracions.....	7
1.2.1	Segons la font d'energia.....	8
1.2.2	Segons el comportament del sistema	9
1.2.3	Segons la llei temporal que descriu el moviment.....	9
1.3	Descripció dels senyals en el domini temporal	11
1.3.1	Nivells d'amplitud.....	11
1.3.2	Potència. Energia.....	14
1.3.3	Anàlisi estadística. Densitat de probabilitat. Autocorrelació. Correlació encreuada..	16
1.4	Moviment harmònic	20
1.4.1	Representació vectorial. Fasors.....	21
1.4.2	Representació complexa. Notació exponencial.....	22
1.4.3	Suma de funcions harmòniques	24
1.4.4	Composició de funcions harmòniques en eixos ortogonals.....	27
1.5	Descripció dels senyals en el domini freqüencial.....	30
1.5.1	Sèrie de Fourier	32
1.5.2	Transformada de Fourier en temps discret.....	36
1.5.3	Transformada contínua de Fourier	38
	Propietats	38
	Densitat Espectral d'Energia	42
	Transformada de Fourier de senyals periòdics o quasiperiòdics	43
	Espectre de senyals aleatoris.....	44
	Espectre per bandes freqüencials.....	46
1.5.4	Transformada discreta de Fourier	49
1.5.5	Finestres temporals.....	58
1.5.6	Espectres a partir de la Transformada Discreta de Fourier	61
1.6	Escales de freqüència	63
1.7	Bibliografia.....	65

1 Descripció i anàlisi de magnituds en l'estudi de vibracions

Introducció

De manera general, es pot entendre per vibració qualsevol moviment oscil·latori -d'un sòlid, o d'un fluid- més o menys regular a l'entorn de l'estat de repòs o d'un moviment mitjà d'arrossegament. A la figura 1.1 es pot veure un fardell penjat d'un carro que es pot moure sobre una guia. Si el carro és fix i el fardell s'aparta de la posició d'equilibri adquirirà un moviment oscil·latori al seu entorn. Si el carro està obligat a desplaçar-se al llarg de la guia el fardell oscil·larà respecte al carro.

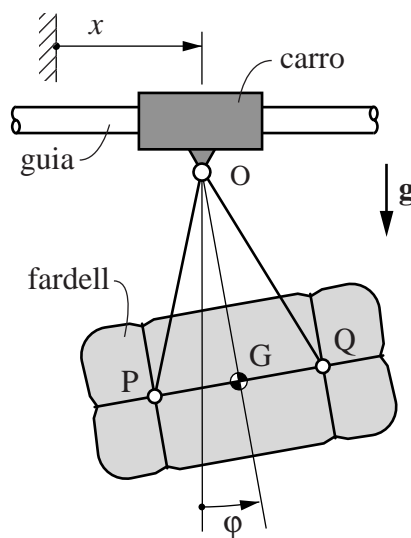


Figura 1.1. Esquema de sistema vibratori.

De fet, el moviment d'un sistema es pot considerar com superposició d'un moviment d'arrossegament, el repòs n'és un cas particular, i una pertorbació d'aquest moviment. La frontera entre el moviment d'arrossegament i la seva pertorbació s'estableix, més o menys convencionalment, en funció del fenomen que es vol destacar i de la rapidesa de la variació temporal de les magnituds implicades. Així per exemple, els moviments oscil·latoris d'un vaixell -capcineig, balanceig i guinyada- poden considerar-se com vibracions si es considera la translació del vaixell com moviment d'arrossegament. Ara bé, aquests moviments no es consideraran vibracions en l'estudi de les pertorbacions ocasionades pel funcionament dels motors i el moviment d'arrossegament correspondrà al moviment global del vaixell considerat com un sòlid totalment rígid.

Una situació similar es pot trobar en estudiar un vehicle. Si el que es vol és estudiar el comportament de la suspensió es considerarà com vibració del vehicle el seu moviment al voltant de la trajectòria mitjana que faria sobre un ferm perfectament llis sense accelerar o frenar. Ara bé, si l'estudi vol contemplar l'efecte del motor probablement es considerarà com vibració dels diferents punts del xassís el moviment d'aquests al voltant de la trajectòria que tindrien si el xassís fos perfectament rígid.

Les vibracions poden ser produïdes amb propòsits funcionals: alimentadors vibratoris, cubetes de rentat, vibradors de formigó, massatges, aplicacions mèdiques, etc., o poden ser efectes no desitjables que es generen per multitud de causes: funcionament de màquines en general, lliscament relatiu entre superfícies, impactes, acció del vent sobre estructures –edificis, ponts, ales d'avió, etc.–, combustió no uniforme en calderes, etc.

Les vibracions generades en una font –o emissor– no hi queden localitzades sinó que es propaguen a l'entorn per mitjà de diversos camins de transmissió: canonades de les instal·lacions, suports, fonaments, aire, etc., fins arribar als receptors que poden ser equips, aparells... i també les persones. Pel que fa a aquestes poden percebre les vibracions pel sentit del tacte –percepció tàctil– o pel sentit de l'oïda –percepció auditiva– i en aquest cas es parla de so.

No només és el dissenyador mecànic en les seves més variades activitats –industrial, naval, aeronàutica, etc.– qui ha de prendre consciència que les vibracions cauen de ple en el seu àmbit. El tècnic de manteniment no pot ignorar que les vibracions són al mateix temps una pertorbació a corregir i un símptoma de l'estat de les seves màquines i instal·lacions. El responsable de seguretat i higiene en el treball i els responsables de medi ambient de les administracions han de tenir en compte que les vibracions, tant en la seva manifestació tàctil com auditiva, són una causa important de contaminació ambiental que afecta el rendiment, la salut i el benestar.

1.1 Definicions

De manera general, un **senyal** és qualsevol fet, objecte o característica, de fet qualsevol cosa, que conté informació detectable i, per tant, utilitzable per posar-la de manifest, emmagatzemar-la i transmetre-la, si escau. Les pertorbacions que es superposen a un senyal útil s'anomenen **soroll**.

En l'estudi dels fenòmens físics, s'entén per **senyal analògic** una magnitud física, en general elèctrica, que varia o no amb el temps i que representa una altra magnitud, per exemple de

l'acceleració d'un punt d'un sòlid. En general, es busca la proporcionalitat directa entre ambdues magnituds. Un senyal analògic es representa i s'analitza matemàticament com una funció contínua, la magnitud representada, d'una variable contínua, el temps. És usual donar directament el nom de senyal a la funció que descriu la variació temporal de la magnitud física.

La representació gràfica, en funció del temps, d'un senyal s'anomena **forma d'ona** del senyal.

Un **senyal digital** conté informació de la variable física que representa quantificada en nivells i per a certs instants de temps, en principi a intervals regulars Δt , període de mostratge; el nombre de mostres per segon és la **frequència de mostratge**, f_m . Així doncs, un senyal digital és una llista o seqüència de valors numèrics discrets, representables amb enters, capaç de ser emmagatzemada i tractada en un ordinador o qualsevol altre artefacte digital adequat. El nombre de valors discrets utilitzats s'anomena **resolució** i usualment es mesura en nombre de bits (nombre de valors discrets = $2^{\text{nombre de bits}}$)

A la figura 1.2, es pot observar la representació gràfica, la forma d'ona, d'un senyal que correspon a la vibració vertical produïda en el terra per una voladura.

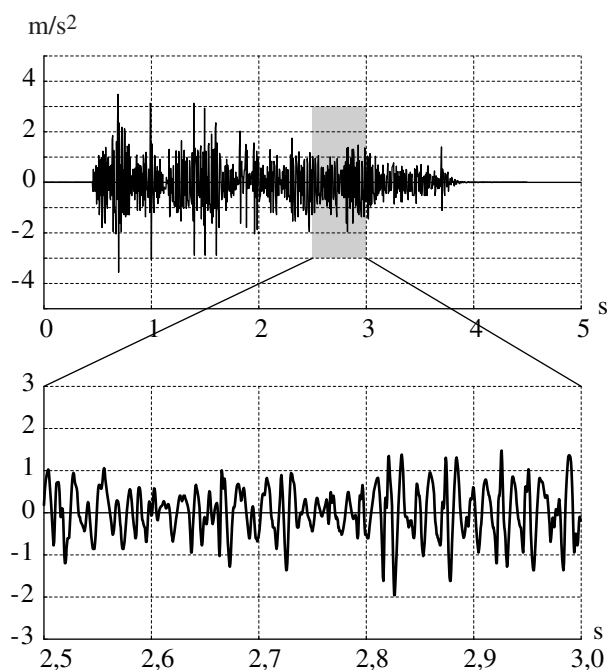
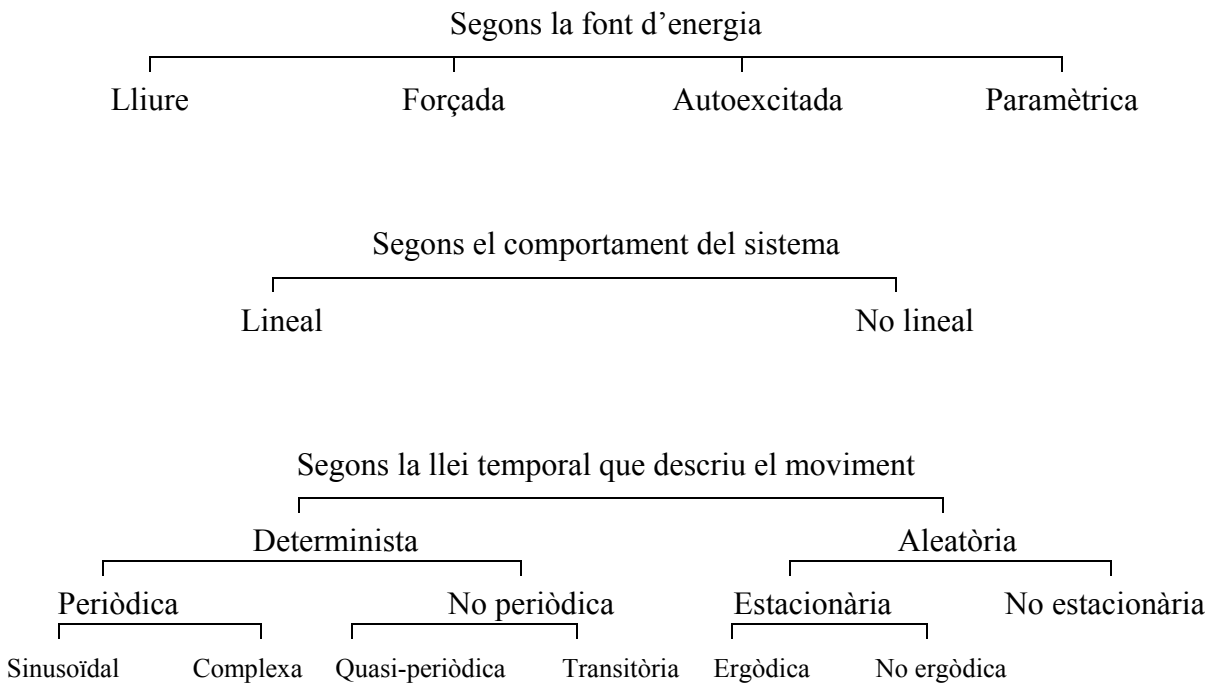


Figura 1.2. Acceleració vertical de vibració produïda per una voladura.

1.2 Classificació de les vibracions

Les vibracions es poden classificar de maneres diverses atenent a diferents conceptes, propietats, necessitats... A la taula 1.1, es presenta una classificació en funció de la font

d'energia que les genera, en funció del comportament del sistema vibratori i segons la llei que descriu el moviment del sistema.



Taula 1.1. Classificació de les vibracions.

1.2.1 Segons la font d'energia

Tot sistema mecànic en repòs necessita una certa quantitat d'energia per posar-se en moviment i quan està en moviment, si no es desitja que es pari, li cal un subministrament d'energia que restitueixi l'energia perduda a causa de les resistències passives. Sota el punt de vista d'aquesta energia subministrada al sistema, les vibracions es poden classificar en:

Vibració lliure. Quan un sistema oscil·la sense la intervenció de motors o actuadors es diu que la seva vibració és lliure. L'oscil·lació del sistema s'inicia perquè se li introdueix energia, ja sigui apartant-lo de la posició d'equilibri, donant-li una velocitat o de les dues maneres simultàniament (donant-li unes condicions inicials) i s'extingeix a causa de la dissipació de l'energia. Sovint són produïdes per percussions: campanes, cordes de piano, cops de porta, premses; per separació de la posició d'equilibri: cordes de guitarra; per voladures, etc.

Vibració forçada o excitada. Quan un sistema oscil·la a causa de la intervenció de motors o actuadors es diu que la seva vibració és forçada o excitada. En aquests casos, els motors o actuadors actuen com font que subministra l'energia a un ritme establert externament,

independent del sistema i que per tant li defineix el ritme del moviment, per exemple la freqüència si és harmònic. En són exemples la vibració: d'un motor, d'un altaveu, d'una caixa de canvis, d'un rentaplats, etc.

Vibració autoexcitada. En aquest tipus de vibració l'energia introduïda al sistema no té un ritme preestablert per un motor o actuador sinó que s'hi introdueix al ritme marcat per les oscil·lacions del propi sistema, que depèn de les seves característiques. Això fa que siguin difícils d'estudiar i d'eliminar si són indesitjables. En són exemples: el xisclar de les rodes, els frens i les frontisses; les flames en les cambres de combustió i calderes; el soroll de les canonades d'aigua; el so dels instruments clàssics de vent i corda que no són de percussió; l'arrossegar d'una cadira, etc.

Vibració paramètrica. En aquest cas la introducció d'energia està associada a la variació periòdica d'algun paràmetre del sistema. Són exemples d'aquesta variació: la rigidesa a flexió en el pla vertical d'un eix horitzontal a causa de la secció no circular de l'eix, per exemple per la presència de la ranura d'un xaveter; la rigidesa d'una transmissió per bieles com les emprades en alguns robots; la inèrcia dels gronxadors, etc.

1.2.2 Segons el comportament del sistema

El comportament dels sistemes mecànics queda descrit per les equacions de moviment, equacions diferencials de segon ordre. Segons siguin aquestes equacions diferencials es classifiquen les vibracions en:

Vibració de sistemes lineals. Les seves equacions de moviment són equacions diferencials lineals que poden ser de coeficients constants o no. Usualment, s'estudien les de coeficients constants que tenen solució analítica i aproximen sovint prou bé la realitat. Un cas particular és el dels sistemes lineals amb paràmetres periòdics, que donen lloc a les vibracions paramètriques.

Vibració de sistemes no lineals. Les seves equacions de moviment són equacions diferencials no lineals.

1.2.3 Segons la llei temporal que descriu el moviment

Vibració determinista. Es pot descriure mitjançant una funció matemàtica explícita i per tant es té el seu valor en un instant qualsevol. Poden ser **periòdiques**, si es repeteixen al cap d'un cert temps, com les harmòniques, figura 1.3, o les periòdiques complexes, figura 1.4, o

no periòdiques si no es repeteixen, com les quasi-periòdiques, figura 1.5, o les transitòries, figura 1.6. Les vibracions periòdiques complexes són la suma de vibracions harmòniques de freqüències amb relació racional i les quasi-periòdiques provenen de la suma de vibracions harmòniques de freqüències amb relació no racional.

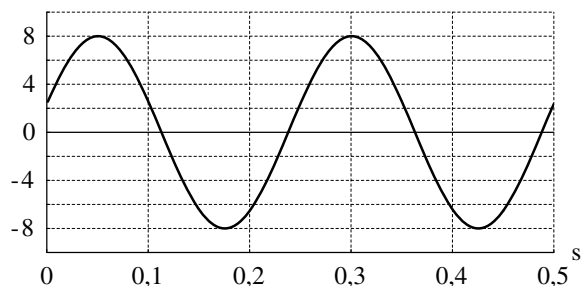


Figura 1.3. Vibració harmònica.

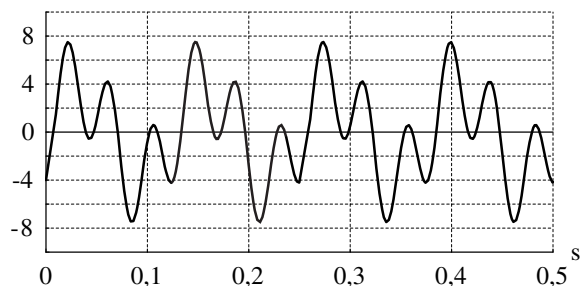


Figura 1.4. Vibració periòdica.

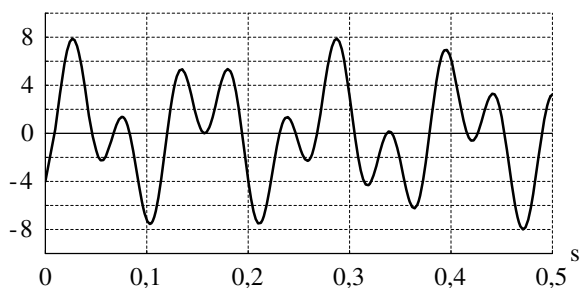


Figura 1.5. Vibració quasi-periòdica.

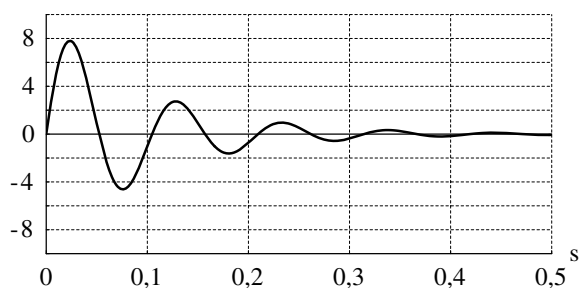


Figura 1.6. Vibració transitòria.

Vibració aleatòria (figura 1.7). Si les magnituds físiques es descriuen mitjançant les seves propietats estadístiques aleshores la vibració s'anomena aleatòria. Si aquestes propietats estadístiques són independents de l'instant de mesura es diu que la vibració aleatòria és **estacionària** i si no s'anomena **no estacionària**. Si les propietats estadístiques d'una vibració estacionària associada a un fenomen mesurades al llarg del temps i les propietats estadístiques mesurades en un instant concret sobre un conjunt de mesures del mateix fenomen coincideixen, aleshores la vibració estacionària és ergòdica i si no s'anomena no ergòdica.

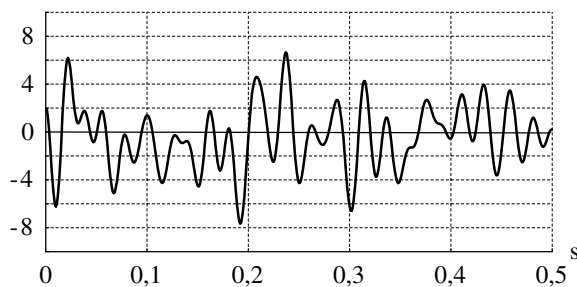


Figura 1.7. Vibració aleatòria.

1.3 Descripció dels senyals en el domini temporal

La descripció d'una vibració mitjançant la història temporal de les seves magnituds s'anomena descripció en el domini temporal. Mitjançant l'anàlisi freqüencial s'obté la descripció de la vibració en funció de la freqüència o descripció en el domini freqüencial.

1.3.1 Nivells d'amplitud

Per quantificar, mitjançant un valor únic, el nivell de vibració –desplaçament, velocitat, acceleració– o de magnituds associades a aquesta –força, pressió...– a partir de la seva evolució en el temps (figura 1.8 i figura 1.9), es defineixen els següents valors o nivells globals determinats a partir d'un interval de temps T d'observació de la vibració que teòricament en alguns casos hauria de ser infinit.

Amplitud. Valor màxim d'una vibració harmònica.

Valor de pic positiu. Valor positiu més gran de la vibració durant l'interval de temps T .

Valor de pic negatiu. Valor negatiu més gran de la vibració durant l'interval de temps T .

Valor de pic (o pic màxim). Valor més gran, positiu o negatiu, de la vibració durant l'interval temps T .

Valor de pic a pic. Suma dels valors de pic positiu i de pic negatiu.

Valor de mitjana rectificada. Mitjana, durant l'interval de temps T , dels successius valors de la vibració presos tots positius. Es calcula mitjançant l'expressió:

$$x_m = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1)$$

Valor eficaç o valor RMS. És l'arrel quadrada de la mitjana, durant l'interval de temps T , dels quadrats dels successius valors de la vibració. Aquesta mitjana s'anomena **valor quadràtic mitjà** de la vibració i, per tant, el valor eficaç es defineix també com l'arrel quadrada del valor quadràtic mitjà.

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (2)$$

Els diferents valors de pic només indiquen valors màxims assolits sense tenir en compte la història temporal de la vibració. Els valors amittanats –mitjana rectificada i valor eficaç– són valors globals en la determinació dels quals intervé tota la història temporal. En el cas d'una vibració sinusoidal, descrita com $x(t) = x_p \cos(2\pi f t)$, el nivell eficaç o valor RMS és

$x_{\text{RMS}} = x_p / \sqrt{2}$. Per a una vibració arbitrària, es defineix el **factor de pic** com la relació entre el valor de pic i el valor eficaç.

Sovint, més que el valor eficaç calculat en un interval temporal molt gran (teòricament infinit), proporciona una millor informació del senyal determinar, en cada instant, una aproximació del valor eficaç obtinguda només amb la informació precedent. Això dóna lloc a una funció del temps que és el valor eficaç mòbil. Es pot calcular amb un interval de llargada constant de la informació precedent donant el mateix pes a tota la informació, expressió 3, o utilitzant tota la història precedent, però donant més pes a la informació més recent, expressió 4. Això dóna lloc a la ponderació exponencial caracteritzada per la seva constant de temps τ .

$$x_{\text{RMS}}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t x^2(t') dt'} \quad (3)$$

$$x_{\text{RMS}}(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} x^2(t') dt'} \quad (4)$$

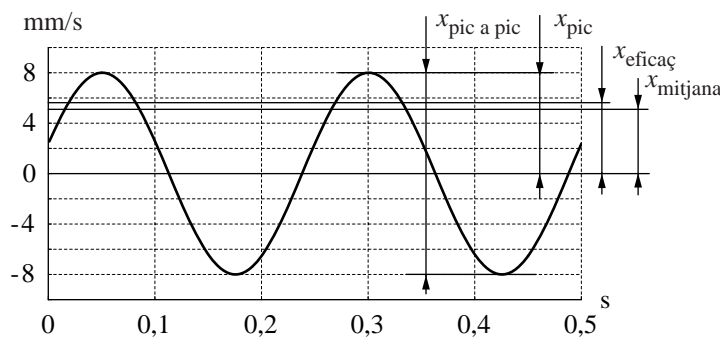


Figura 1.8. Valors de vibració definits a partir de l'evolució temporal. Vibració harmònica.

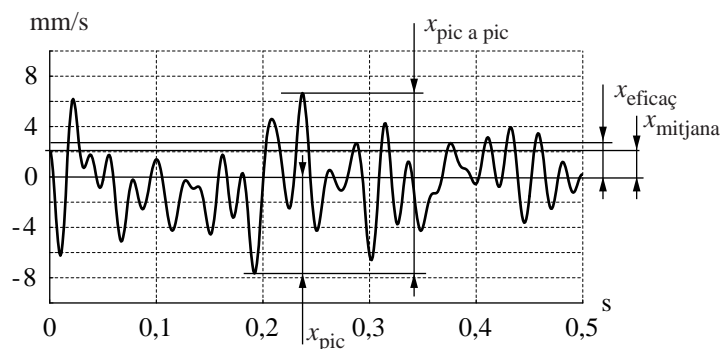


Figura 1.9. Valors de vibració definits a partir de l'evolució temporal. Vibració aleatòria.

Per a la representació dels nivells de vibració és usual emprar **escales lineals i logarítmiques** (figura 1.10). Amb l'ús d'una escala logarítmica es poden representar a la mateixa escala i amb la mateixa precisió relativa, valors molt grans i molt petits.

Així, per exemple, el pas d'un nivell 0,01 a un nivell 0,02 queda representat pel mateix increment que el pas d'un nivell 100 a un nivell 200. Això és de gran interès ja que les vibracions, en general, es valoren pel seu nivell relatiu més que pel seu nivell absolut. Segurament, serà símptoma d'alarma que una màquina passi a produir una vibració de nivell doble de l'usual, independentment del nivell absolut d'aquest nivell usual.

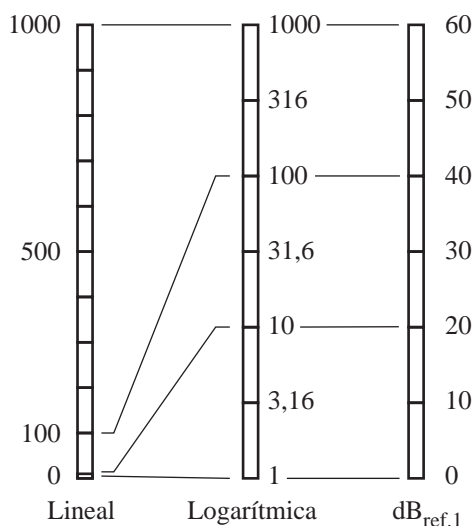


Figura 1.10. Escales lineal, logarítmica i en decibels referits a la unitat.

L'ús d'escales logarítmiques es materialitza sovint emprant **decibels** (dB) per comparar nivells de vibració. El nombre de decibels que separen un nivell a_1 d'un altre nivell a_0 es calcula mitjançant l'expressió:

$$N[\text{dB}] = 20 \lg \frac{a_1}{a_0} \quad (5)$$

A l'exemple numèric citat ambdós increments corresponen a 6 dB:

$$20 \lg \frac{0,02}{0,01} = 20 \lg \frac{200}{100} = 6 \text{ dB}$$

Així doncs 1 dB equival a multiplicar per 1,1220 i -1 dB a multiplicar per 0,8913.

Un nivell de vibració pot expressar-se com un cert nombre de dB si es pren un valor a_0 de referència. En l'exemple, si es pren com a valor de referència $a_0 = 0,01$, al nivell 0,02 li corresponen 6 dB, al nivell 100 li corresponen 80 dB i al nivell 200 li corresponen 86 dB. Els nivells de referència més emprats en l'àmbit de les vibracions són 10^{-6} mm/s per a la velocitat, 10^{-6} m/s² per a l'acceleració i $20 \cdot 10^{-6}$ Pa per a la pressió acústica.

Si es sumen dues magnituds, el nombre de dB corresponent a la suma no és la suma de dB de cadascuna d'elles com es pot comprovar continuant amb l'exemple anterior; a 100 li corresponen 80 dB i a 200 = (100+100) li corresponen 86 dB, no 160 dB. Per sumar magnituds expressades en dB primer cal passar-les a escala lineal, a continuació sumar-les i finalment expressar la suma en dB altra vegada, si escau.

Cal notar que tot i utilitzar el prefix *deci* en el nom de la unitat (Bel, que no s'utiliza), el factor emprat en la seva definició a l'expressió 3 és 1/20. Aquest fet prové de la utilització inicial de la unitat (Alexander Graham Bell) per relacionar potències amb un factor 1/10. Ara bé, la potència està lligada al quadrat de les altres magnituds com per exemple:

- La potència dissipada per un amortidor de comportament lineal de constant c és $P_d = c v^2$ essent v la velocitat de separació dels seus extrems.
- La potència dissipada per una resistència elèctrica R és $P_d = (1/R)U^2 = R I^2$ essent U la tensió entre els seus extrems i I la intensitat de corrent que hi circula.

De manera que, com es posa de manifest utilitzant el primer exemple de potència, amb un factor 1/10 per a la potència i un factor 1/20 per a la velocitat, corresponen el mateix nombre de decibels tant a la relació de potències com a la relació de velocitats.

$$N[\text{dB}] = 10 \lg \frac{P_1}{P_0} = 10 \lg \frac{c v_1^2}{c v_0^2} = 20 \lg \frac{v_1}{v_0} \quad (6)$$

1.3.2 Potència. Energia

Independentment de la magnitud física representada per un senyal $x(t)$ –desplaçament, velocitat, acceleració, força, pressió, etc.– s'associa al quadrat del senyal el significat de potència del senyal i a la integral temporal de $-\infty$ a $+\infty$ del quadrat, el significat d'energia del senyal.

$$\text{Potència}[x(t)] = x^2(t)$$

$$\text{Energia}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

L'energia en un interval de temps T d'observació i la potència mitjana en aquest interval són:

$$\text{Energia}[x(t)] = \int_0^T x^2(t) dt$$

$$P_m[x(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

És fàcil veure que la potència mitjana en el interval de temps T és el quadrat del valor eficaç calculat en aquest interval de temps.

Els senyals d'energia finita, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \leq \infty$, s'anomenen transitoris d'energia finita i poden representar magnituds físiques que s'anul·len passat un cert temps o que tendeixen asimptòticament a zero, com pot ser el cas d'un cop i la resposta d'un sistema lineal i estable a aquest cop.

La potència i l'energia així definides no corresponen directament a la potència i l'energia físiques però s'hi relacionen fàcilment, només cal recordar els exemples de l'apartat anterior.

Sovint, cal estudiar la superposició de vibracions causades per diverses fonts de vibració, per exemple estudiar la contribució de la vibració generada per una màquina en la vibració total d'un punt d'un taller. La superposició des del punt de vista energètic és additiva –la potència associada a la vibració total és la suma de potències associades a la vibració causada per cada font– sempre i quan el comportament de cada font no es vegi afectat per la presència de les altres i la vibració que generen siguin descorrelades. Una font no es veu afectada per la presència d'altres si la potència, o qualsevol magnitud relacionada, que subministra no està condicionada per l'estat vibratori del sistema. Dues vibracions $x(t)$ i $y(t)$ estan descorrelades si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt = 0$$

i per tant, anomenant P_m a la potència mitjana:

$$\begin{aligned} P_m[x(t) + y(t)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) + y(t))^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t) + y^2(t) + 2x(t)y(t)) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = P_m[x(t)] + P_m[y(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

Són descorrelades les vibracions harmòniques de freqüències diferents i moltes vibracions aleatòries procedents de fonts independents, per exemple les vibracions produïdes en un mateix punt per dos trens d'una línia que es creuen.

Si les hipòtesis per tal que la superposició sigui additiva són acceptables, es pot calcular fàcilment el valor eficaç de la vibració total a partir del valor eficaç de les vibracions causades per cadascuna de les fonts ja que com que la potència mitjana P_m és el quadrat del valor eficaç, l'expressió 7 posa de manifest que:

$$(x + y)_{\text{RMS}}^2 = x_{\text{RMS}}^2 + y_{\text{RMS}}^2$$

Aquest resultat es pot fer extensiu a la suma de senyals independents i descorrelats; així per exemple el valor eficaç de $x(t) = x_{p1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + x_{p2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ és, si $f_1 \neq f_2$,

$$x_{\text{RMS}} = \left((x_{p1}/\sqrt{2})^2 + (x_{p2}/\sqrt{2})^2 \right)^{1/2} = \left((x_{p1}^2 + x_{p2}^2)/2 \right)^{1/2}$$

Si $f_1 = f_2$ el valor eficaç depèn dels angles de fase:

$$x_{\text{RMS}} = \left((x_{p1}^2 + x_{p2}^2 + 2x_{p1} x_{p2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) / 2 \right)^{1/2}$$

1.3.3 Anàlisi estadística. Densitat de probabilitat. Autocorrelació. Correlació encreuada

Els nivells de vibració definits en els apartats anteriors permeten quantificar la vibració mitjançant un valor únic i la informació que retenen de la història temporal pot ser suficient per a diversos propòsits. Per exemple: per valorar l'efecte de la introducció d'un aïllament en una màquina pot ser suficient comparar el nivell eficaç de la vibració transmesa a terra abans i després d'introduir l'aïllament; per caracteritzar les vibracions en l'estudi del seu efecte en les estructures es fa servir el valor de pic de la velocitat de vibració.

Quan són necessaris uns coneixements més profunds de la vibració o una descripció més detallada de la seva evolució temporal es recorre a diferents procediments d'anàlisi basats en conceptes estadístics.

En diversos casos –per exemple en l'estudi de fatiga, en la simulació de l'excitació de la suspensió de vehicles– és d'interès tenir una descripció estadística de la vibració, en la que quedi reflectida de manera percentual el temps que aquesta vibració ha tingut un cert valor.

L'obtenció d'aquesta descripció es realitza mitjançant la funció anomenada densitat de probabilitat $p(x)$, la definició de la qual és: probabilitat que un valor instantani x de la vibració quedi dins d'un cert interval Δx dividida per la mida de l'interval, és a dir:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T_x}{\Delta x} \right) \quad (8)$$

on T_x és el temps total que x es troba dins de l'interval $(x, x + \Delta x)$ durant el temps d'observació T .

La funció densitat de probabilitat $p(x)$ és sempre una funció real i no negativa.

A la figura 1.11 es representa l'esquema conceptual per a l'obtenció de la densitat de probabilitat. La vibració passa per un conjunt de blocs en paral·lel –detectors de nivell– cadascun dels quals acciona un cronòmetre acumulador durant el temps que el valor de la vibració està comprès entre els seus nivells de comparació, x_i i $x_i + \Delta x$. El temps t_i mesurat amb cada cronòmetre acumulador, es divideix pel temps d'observació T i per l'interval Δx entre els nivells de comparació, amb la qual cosa s'obté la densitat de probabilitat $p(x)$. A partir dels valors $p(x)$ s'obté el gràfic de densitat de probabilitat de la vibració.

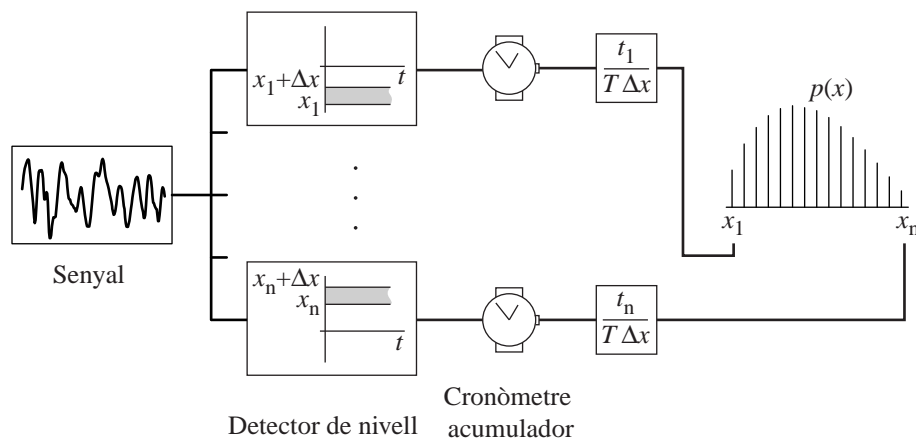


Figura 1.11. Esquema conceptual de l'obtenció de la densitat de probabilitat d'una vibració.

A la figura 1.12 es mostra la densitat de probabilitat d'una vibració aleatòria i d'una vibració harmònica. És interessant comparar la forma de les dues gràfiques de densitat de probabilitat, en particular pel que fa al comportament en els extrems.

Malgrat que la densitat de probabilitat és una descripció molt útil de la vibració i proporciona bona informació de com estan distribuïts, en mitjana, els valors instantanis de vibració, dona poca informació de la història temporal o del contingut freqüencial de la vibració. Per pal·liar aquesta manca d'informació i obtenir una millor descripció s'introdueix la funció autocorrelació $R_x(\tau)$. Aquesta funció descriu, en mitjana, la dependència dels valors de la vibració en un cert instant respecte als valors en un altre instant i ve definida per l'expressió:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (9)$$

A la pràctica, els límits d'integració estan condicionats pel temps d'observació.

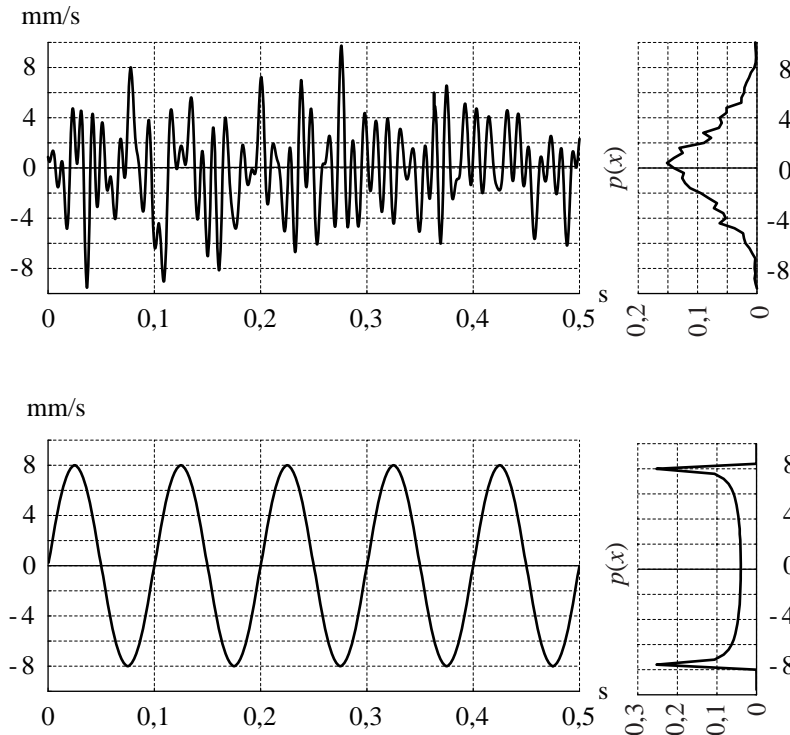


Figura 1.12. Densitat de probabilitat d'una vibració aleatòria i d'una vibració harmònica.

La funció d'autocorrelació $R_x(\tau)$ és sempre una funció parella real, amb un màxim a $\tau = 0$, pot ser positiva o negativa, i el seu valor en l'origen coincideix amb el valor quadràtic mitjà, com es pot veure simplement substituint $\tau = 0$ a l'expressió 9, i coincideix per tant amb el quadrat del valor eficaç.

Per a un cert decalatge τ_i , el valor R_i de la funció d'autocorrelació $R_x(\tau)$ és tant més gran com més gran sigui la semblança entre la vibració $x(t)$ i ella mateixa decalada un temps τ_i $-x(t + \tau_i)$. Per això, el valor màxim de la funció d'autocorrelació s'obté per a $\tau = 0$ que correspon a comparar la vibració amb si mateixa.

Si la vibració és periòdica la funció d'autocorrelació també ho és i amb el mateix període, ja que en decalar la vibració un període coincideix amb ella mateixa.

Com que la funció d'autocorrelació valora la semblança d'una vibració amb si mateixa decalada, permet detectar periodicitats d'una vibració que difícilment poden deduir-se de l'observació directa de la història temporal. Aquesta propietat la fa el punt de partida per a l'anàlisi del contingut freqüencial de les vibracions aleatòries.

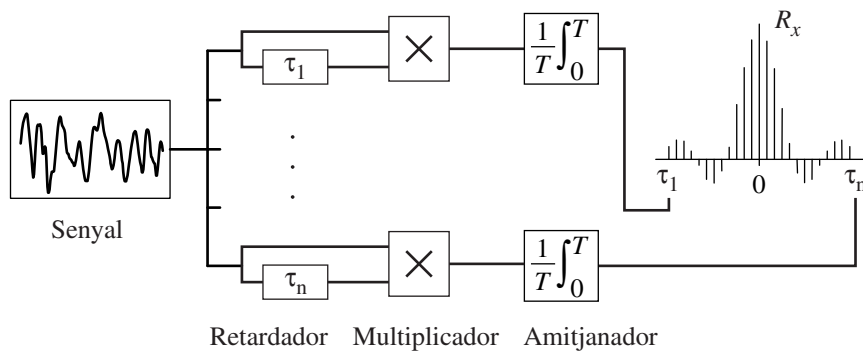


Figura 1.13. Esquema conceptual de l'obtenció de la funció d'autocorrelació.

A la figura 1.13 es representa un esquema conceptual per a l'obtenció de la funció d'autocorrelació d'una vibració. La vibració passa per un conjunt de blocs en paral·lel –retardadors i multiplicadors–, en cadascun dels quals es realitza contínuament el producte del valor de la vibració en un instant t pel valor de la vibració en un instant $t + \tau_i$. Els resultats d'aquestes multiplicacions s'amitjaven durant el temps d'observació, amb la qual cosa s'obté l'autocorrelació R_i per a cada valor de retard τ_i . A partir dels valors R_i s'obté la funció d'autocorrelació.

La figura 1.14 mostra la funció d'autocorrelació d'una vibració aleatòria on s'observen les propietats citades d'aquesta funció i també com s'atenua en augmentar el retard, la qual cosa posa de manifest el seu caràcter aleatori.

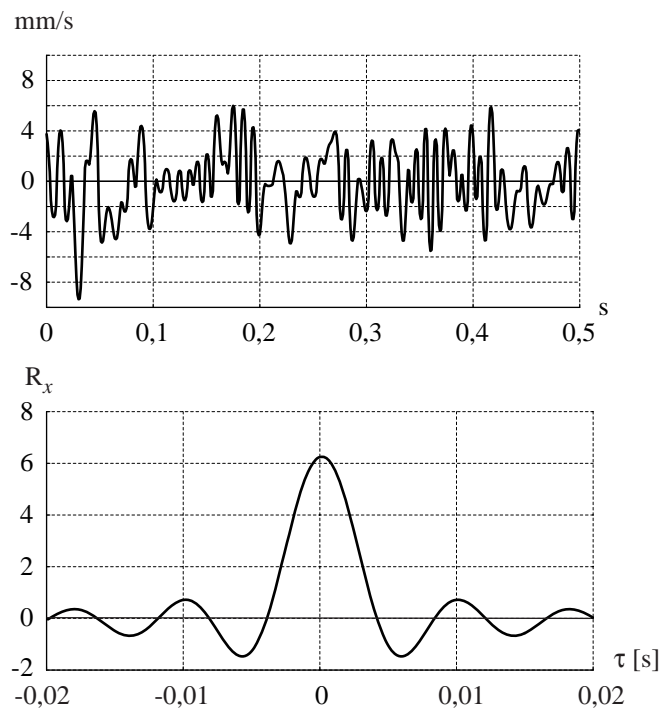


Figura 1.14. Funció d'autocorrelació d'una vibració aleatòria.

La funció de correlació encreuada $R_{xy}(\tau)$ entre dos senyals $x(t)$ i $y(t)$ descriu, en mitjana, la dependència dels valors d'un senyal en un cert instant i els valors de l'altre senyal en un altre instant i ve definida per l'expressió:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (10)$$

A la pràctica, els límits d'integració estan condicionats pel temps d'observació.

La determinació de la funció de correlació encreuada té moltes aplicacions, entre les quals es troben la mesura del temps de retard entre l'entrada $x(t)$ i la sortida $y(t)$ d'un sistema, la determinació de camins de transmissió i la detecció i extracció de senyals deterministes emmascarats per soroll. El retard es posa de manifest, sempre que la velocitat de propagació sigui sensiblement constant per a qualsevol pertorbació, en forma d'un màxim a la funció de correlació encreuada per a τ igual al retard. Els camins de transmissió es poden identificar a partir del retard que introdueixen a causa de la seva llargada. Una aplicació concreta és la determinació d'anomalies –esquerdes, canvi de característiques...– en l'interior de peces o en el terreny mitjançant les reflexions que produeixen ones que s'introdueixen des de la superfície.

1.4 Moviment harmònic

El moviment harmònic és el moviment oscil·latori periòdic més simple i és fàcil d'analitzar-ne les característiques. Qualsevol altre tipus de moviment periòdic es pot tractar com una superposició de moviments harmònics, tal com es veurà amb l'anàlisi de Fourier. Aquest moviment, sigui lineal o angular, ve descrit per l'expressió 11 i representat a la figura 15.

$$x(t) = x_p \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) = x_p \cos(2\pi f t + \varphi_0) = x_p \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11)$$

on x_p és l'amplitud de l'oscil·lació, T és el període, f és la freqüència, ω és la pulsació o freqüència angular i $\varphi_0 = 2\pi f t_0$ és l'angle de fase inicial, amb t_0 el temps d'avanç. Evidentment el moviment es repeteix cada període, és a dir cada T s. L'angle de fase inicial depèn de l'instant que es pren com origen de temps i si no és estrictament necessari, com per exemple quan es comparen dos moviments, és usual prendre'l igual a 0.

La velocitat i l'acceleració vénen donades per:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_p 2\pi f \sin(2\pi f t + \varphi_0) = x_p 2\pi f \cos\left(2\pi f t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -x_p (2\pi f)^2 \cos(2\pi f t + \varphi_0) = x_p (2\pi f)^2 \cos(2\pi f t + \varphi_0 + \pi) \quad (13)$$

Aquestes expressions posen de manifest que la velocitat i l'acceleració també són funcions harmòniques amb la mateixa freqüència d'oscil·lació que el desplaçament, però d'amplituds multiplicades, respecte a aquest, per $2\pi f$ i $(2\pi f)^2$ respectivament i de fases incrementades, també respecte al desplaçament, $\pi/2$ i π respectivament. Un increment de fase s'anomena també avanç de fase ja que sobre l'argument de la funció harmònica té el mateix efecte que avançar el temps, $(2\pi f t + \varphi_0) = (2\pi f (t + t_0))$, és per aquesta raó que és diu que la velocitat i l'acceleració estan avançades, respecte al desplaçament, $\pi/2$ i π respectivament. En resum, al derivar una funció harmònica queda multiplicada per $2\pi f$ i avançada en fase $\pi/2$. L'acceleració resulta ser proporcional al desplaçament però de sentit contrari.

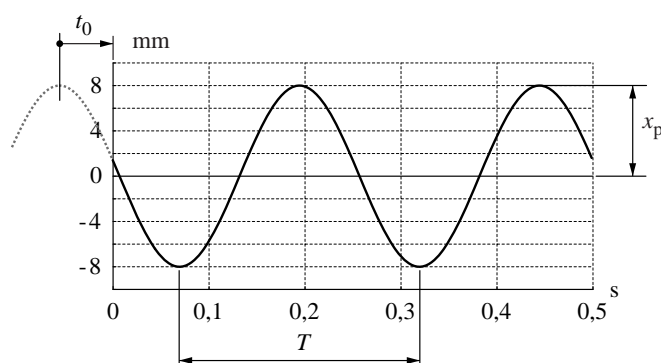


Figura 1.15. Funció harmònica: Amplitud, període i temps d'avanç.

1.4.1 Representació vectorial. Fasors

El moviment harmònic es pot representar com la projecció sobre una línia recta d'un vector **OP** de mòdul x_p que gira amb velocitat angular constant $\omega = 2\pi f$. La projecció sobre l'eix vertical dóna $y(t) = x_p \sin(2\pi f t + \varphi_0)$ i la projecció sobre l'eix horitzontal $x(t) = x_p \cos(2\pi f t + \varphi_0)$ (figura 1.16). La velocitat angular es pren en sentit antihorari.

D'acord amb els resultats de l'apartat anterior relatiu a la derivació, la derivada d'una funció harmònica es pot representar també per un vector que gira a $\omega = 2\pi f$, si bé de mòdul multiplicat per $2\pi f$ i girat 90° en sentit antihorari respecte al vector representatiu de la funció original.

El vector giratori en l'instant inicial conté la informació d'amplitud i de fase inicial i si la freqüència és coneguda com en el cas dels circuits de corrent altern -50 Hz o 60 Hz descriu totalment la funció sinusoidal. Aquest vector o la seva representació complexa, que es veurà

en l'apartat següent s'anomena **fasor**. A vegades, per extensió, també s'anomena fasor al vector giratori genèric.

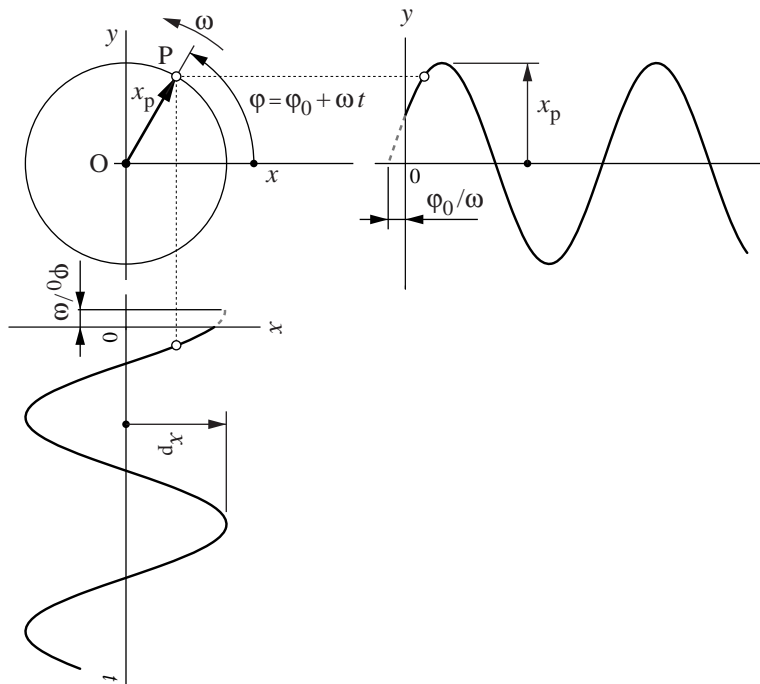


Figura 1.16. Representació vectorial del moviment harmònic.

1.4.2 Representació complexa. Notació exponencial

Qualsevol vector **OP** en un pla xy es pot representar com un nombre complex $z = a + j b$, on $j = \sqrt{-1}$ és la unitat imaginària i a i b són els components del vector, o la part real i la part imaginària del nombre complex. Per fer-ho evident només cal observar la figura 16 i pensar que el vector **OP** és el nombre complex z , l'eix x és l'eix real i l'eix y és l'eix imaginari. En enginyeria no es sol utilitzar la i com a unitat imaginària; en particular en electrotècnica ja que aquí, normalment, s'usa i per representar la intensitat de corrent variable.

El mòdul i l'argument del nombre complex, que corresponen al mòdul del vector i a l'angle d'orientació que forma aquest amb el semieix x positiu, són respectivament:

$$|z_p| = x_p = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\arg(z_p) = \varphi = \arctan(b/a)$$

A partir d'aquests valors, el nombre complex z es pot expressar com $z = x_p \cos \varphi + j x_p \sin \varphi$, i si s'empra la igualtat d'Euler, $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, aleshores es té $z = x_p e^{j\varphi}$. Així doncs, un

vector en el pla i el nombre complex que el representa es poden escriure amb notació exponencial en forma de producte d'un escalar, que indica el mòdul, per una funció exponencial l'argument de la qual indica l'angle d'orientació del vector o l'argument del nombre complex.

En resum doncs, una funció harmònica, que en l'apartat anterior es mostra representada amb un vector giratori, ara es posa de manifest que es pot representar també mitjançant un nombre complex, d'argument variable $\varphi = 2\pi f t + \varphi_0$, i que per referir-s'hi es pot fer ús de la notació exponencial. D'aquest nombre complex se'n pren usualment la part real, tot i que també es podria utilitzar la part imaginària:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[x_p e^{j(2\pi f t + \varphi_0)} \right] = x_p \cos(2\pi f t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \operatorname{Im} \left[x_p e^{j(2\pi f t + \varphi_0)} \right] = x_p \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

La representació complexa i la notació exponencial de les funcions harmòniques és una eina extraordinàriament útil ja que permet disposar de totes les eines matemàtiques associades per manipular-les i operar amb elles.

La notació exponencial es pot rescriure separant els termes constants i el terme funció del temps. El terme constant X és el representatiu del fasor associat a la funció harmònica, que com es pot veure conté la informació de l'amplitud i de l'angle de fase inicial, i el terme funció del temps conté únicament la informació de la freqüència.

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[x_p e^{j(2\pi f t + \varphi_0)} \right] = \operatorname{Re} \left[x_p e^{j\varphi_0} \cdot e^{j2\pi f t} \right] = \operatorname{Re} \left[X \cdot e^{j2\pi f t} \right]$$

Per derivar una funció harmònica expressada en notació exponencial només cal recordar que la derivada d'una funció exponencial és ella mateixa multiplicada per la derivada de l'exponent. Com que $j = e^{j(\pi/2)}$, derivar equival, tal com ja s'ha vist, a multiplicar l'amplitud per $2\pi f$ i avançar la fase 90° .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \operatorname{Re} \left[x_p (2\pi f) j e^{j(2\pi f t + \varphi_0)} \right] = \operatorname{Re} \left[x_p (2\pi f) e^{j(\pi/2)} e^{j(2\pi f t + \varphi_0)} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[x_p (2\pi f) e^{j(2\pi f t + \varphi_0 + \pi/2)} \right] \end{aligned}$$

1.4.3 Suma de funcions harmòniques

Sovint cal analitzar la suma de funcions harmòniques, per exemple en l'estudi de la vibració ocasionada conjuntament per dos motors elèctrics que giren a velocitats angulars diferents. Hi ha dos casos que presenten un interès especial: funcions amb relació de freqüències racional i funcions de freqüències properes. Només en el primer cas la suma és periòdica i només si són de la mateixa freqüència la suma és també harmònica.

Per sumar funcions harmòniques es pot procedir aplicant directament les relacions trigonomètriques, com es fa més endavant en aquest apartat a l'expressió 16, si bé sovint és més clar i entenedor recolzar-se en la geometria de la suma dels vectors giratoris representatius d'aquestes funcions. A la figura 1.17 es mostra la suma dels dos vectors giratoris representatius de les funcions:

$$x_1(t) = x_{p1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{01})$$

$$x_2(t) = x_{p2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_{02})$$

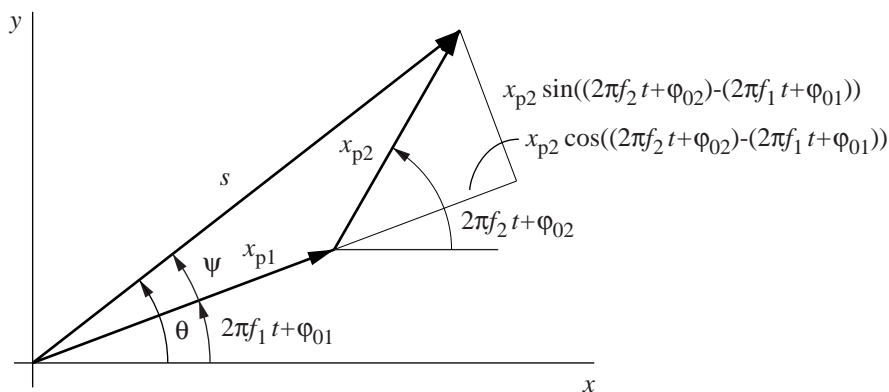


Figura 1.17. Suma de vectors giratoris.

Resolent el triangle definit pels dos vectors giratoris s'obté el mòdul s i l'angle d'orientació θ de la suma. Com es pot veure, en general, ni el mòdul és constant ni l'angle uniformement creixent amb el temps; per tant, no és representativa de cap funció harmònica.

$$s = \sqrt{x_{p1}^2 + x_{p2}^2 + 2x_{p1}x_{p2} \cos((2\pi f_2 t + \varphi_{02}) - (2\pi f_1 t + \varphi_{01}))}$$

$$\theta = (2\pi f_1 t + \varphi_{01}) + \psi = \tag{14}$$

$$= (2\pi f_1 t + \varphi_{01}) + \arctan \frac{x_{p2} \sin((2\pi f_2 t + \varphi_{02}) - (2\pi f_1 t + \varphi_{01}))}{x_{p1} + x_{p2} \cos((2\pi f_2 t + \varphi_{02}) - (2\pi f_1 t + \varphi_{01}))}$$

Si **les freqüències són iguals**, en els angles de la figura 1.17 es pot prescindir dels termes temporals ja els dos vectors que es sumen giren a la mateixa velocitat angular i per tant defineixen un triangle que no es deforma. Això fa que la suma sigui un vector de mòdul constant que gira també a la mateixa velocitat angular i per tant és representatiu d'una funció harmònica de la mateixa freqüència que les funcions de partida. En definitiva doncs, la suma de funcions harmòniques de la mateixa freqüència és una funció de la mateixa freqüència i per fer aquesta suma només cal fer atenció als factors corresponents. En aquest cas el factor, l'amplitud i l'angle de fase inicial, de la suma és:

$$\begin{aligned}
 x_p &= \sqrt{x_{p1}^2 + x_{p2}^2 + 2x_{p1}x_{p2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \\
 \theta &= \varphi_{01} + \psi = \varphi_{01} + \arctan \frac{x_{p2} \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01})}{x_{p1} + x_{p2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Si **la relació entre freqüències és racional** la vibració resultant és periòdica. Siguin dues funcions periòdiques –les funcions harmòniques en són un cas– de freqüències f_1 i f_2 tals que $f_1/f_2 = m/d$ essent m i d enters; els seus períodes verifiquen $T_1/T_2 = d/m$ i això fa que després d'un temps $T = T_1 m = T_2 d$ hagin passat un nombre enter de períodes de cada funció i per tant tot es repeteix exactament igual. En definitiva doncs, la suma és periòdica de període T si m i d són primers entre ells; si tenen divisors comuns el període és el mínim comú múltiple de T_1 i T_2 , fet que es pot estendre a més de dues funcions periòdiques. Més endavant s'estudia el procés contrari: trobar els components harmònics d'una funció periòdica.

Si **les dues freqüències són properes** es produeix el fenomen anomenat **batement**, que consisteix en una variació periòdica de l'amplitud de la vibració resultant. Siguin dues funcions sinusoidals $x_1(t) = x_{p1} \cos(2\pi f_1 t)$ i $x_2(t) = x_{p2} \cos(2\pi f_2 t)$; una expressió de la seva suma es pot trobar utilitzant les relacions trigonomètriques de la següent manera, prenent $\Delta f = f_2 - f_1$ (també es pot fer particularitzant les expressions 14).

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = x_{p1} \cos(2\pi f_1 t) + x_{p2} \cos(2\pi f_2 t) = \\
 &= x_{p1} \cos(2\pi f_1 t) + x_{p2} (\cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi \Delta f t) - \sin(2\pi f_1 t) \sin(2\pi \Delta f t)) = \\
 &= (x_{p1} + x_{p2} \cos(2\pi \Delta f t)) \cos(2\pi f_1 t) + (x_{p2} \sin(2\pi \Delta f t)) \sin(2\pi f_1 t) = \\
 &= \sqrt{(x_{p1} + x_{p2} \cos(2\pi \Delta f t))^2 + (x_{p2} \sin(2\pi \Delta f t))^2} \cos(2\pi f_1 t + \psi) = \\
 &= \sqrt{x_{p1}^2 + x_{p2}^2 + 2x_{p1}x_{p2} \cos(2\pi \Delta f t)} \cos(2\pi f_1 t + \psi) \quad \text{amb}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\psi = \arctan \frac{x_{p2} \sin(2\pi\Delta f t)}{x_{p1} + x_{p2} \cos(2\pi\Delta f t)}$$

En l'expressió 16, s'observa que el primer factor varia entre $x_{p1} + x_{p2}$ i $|x_{p1} - x_{p2}|$ a una freqüència Δf i que el segon factor és aproximadament una funció harmònica de fase lentament variable si Δf és petit, en front de f_1 . En resum doncs, $x(t)$ és una funció aproximadament harmònica d'amplitud variable de forma periòdica.

Si les dues amplituds x_{p1} i x_{p2} són iguals, substituint a les expressions anteriors o refent la demostració, s'obté l'expressió següent:

$$x(t) = \left| 2x_{p1} \cos\left(\frac{2\pi\Delta f}{2}t\right) \right| \cos\left(\frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2}t\right)$$

S'observa en aquest cas que el primer factor varia entre 0 i $2x_{p1}$ i que el segon factor és estrictament harmònic de freqüència la semisuma de les freqüències de partida. A la figura 1.18 es pot veure la forma d'ona de dos batements ocasionats per la suma de dues funcions harmòniques, una de freqüència 50 Hz i l'altra de 47 Hz; en el primer cas l'amplitud de les dues és la mateixa –4 unitats– i en el segon les amplituds són de 5 unitats i de 3 unitats respectivament. S'observa en els dos casos que la freqüència dels batements és de 3 Hz. Cal notar però que la suma no és periòdica de freqüència 3 Hz (es pot veure si es miren en detall les formes d'ona de la figura); en aquest cas, la relació de freqüències és racional –50/47– i aplicant el què s'ha vist anteriorment s'arriba a la conclusió que la freqüència de la suma és d'1 Hz.

En tenir $x_1(t)$ i $x_2(t)$ freqüències lleugerament diferents, la seva suma es pot imaginar com la de dues funcions de la mateixa freqüència però amb la seva fase relativa que varia lentament amb el temps; això fa que les amplituds passin de sumar-se a restar-se, seguint l'expressió 15, i per tant variï regularment l'amplitud de la suma.

Dues situacions típiques on es presenten els batements són: i) en el funcionament simultani de dos motors d'inducció asíncrons que a causa de la diferent càrrega giren a velocitats lleugerament diferents i per tant generen vibracions també de freqüències lleugerament diferents; ii) en l'afinació d'un instrument musical, la freqüència de la nota que aquest emet s'ajusta a una de referència, emesa per un altre instrument o per un diapasó, fent que els batements entre ambdues s'anul·lin i per tant les dues freqüències coincideixin.

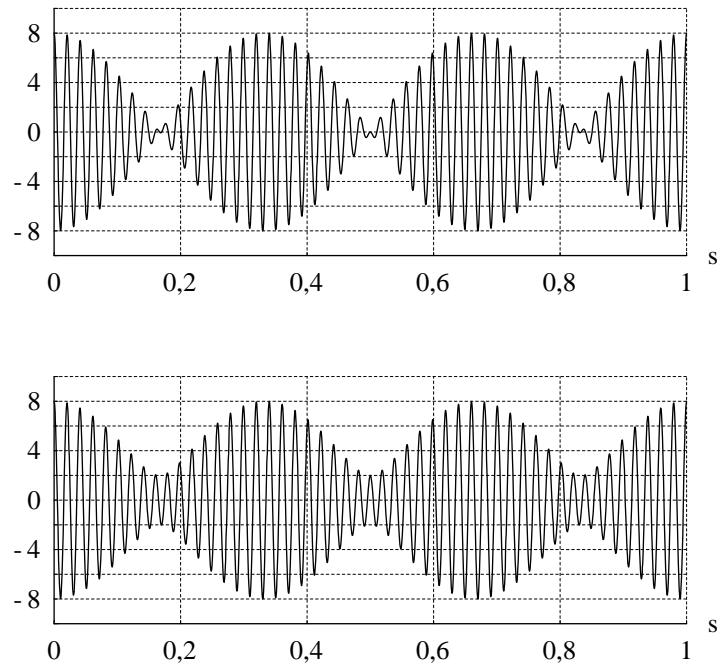


Figura 1.18. Batements de dues funcions harmòniques de la mateixa amplitud i d'amplituds diferents.

1.4.4 Composició de funcions harmòniques en eixos ortogonals

En ocasions, cal representar el gràfic que relaciona dues magnituds que evolucionen al llarg del temps. Així per exemple, quan s'assaja el comportament d'un element elàstic es sol representar el gràfic de la força que fa en funció del què es deforma. Des del punt de vista de l'anàlisi de l'element elàstic com sistema dinàmic es pot considerar, per exemple, que es representa la relació entre l'entrada del sistema –la deformació– i la sortida d'aquest –la força. És usual que la magnitud d'entrada $x(t)$ variï sinusoidalment i si el sistema que s'estudia és de comportament lineal la magnitud de sortida $y(t)$ també ho fa; en aquest cas, la relació entre les dues magnituds queda representada pel gràfic de la funció paramètrica definida per les funcions:

$$x(t) = x_p \cos(2\pi f t)$$

$$y(t) = y_p \cos(2\pi f t + \varphi)$$

(Es pren l'angle de fase inicial de l'entrada nul per simplificar les expressions però no és cap limitació ja que només representa elegir convenientment l'instant $t = 0$.)

Aquest gràfic, tal com es mostra a la figura 1.19, és una el·lipse amb una inclinació α dels eixos i de semieixos de longituds a i b donats per les expressions:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2x_p y_p \cos(\varphi)}{x_p^2 - y_p^2}$$

$$a = \left(x_p^2 \cos^2(\alpha) + y_p^2 \sin^2(\alpha) + 2x_p y_p \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\varphi) \right)^{1/2}$$

$$b = \left(x_p^2 \sin^2(\alpha) + y_p^2 \cos^2(\alpha) - 2x_p y_p \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\varphi) \right)^{1/2}$$

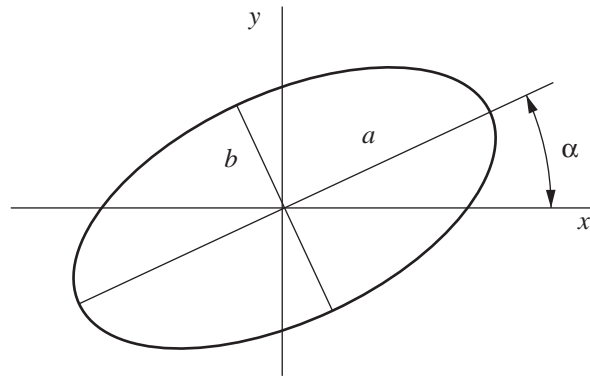


Figura 1.19. Composició de dues funcions harmòniques.

És interessant analitzar dos casos particulars: $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 90^\circ$. Si $\varphi = 0^\circ$ la el·lipse es converteix en una recta d'inclinació y_p/x_p . Si $\varphi = 90^\circ$ la inclinació dels eixos és nul·la, i si a més $x_p = y_p$ i l'escala dels eixos x i y és la mateixa, la corba és una circumferència.

Si $x(t)$ i $y(t)$ tenen freqüències lleugerament diferents la seva composició es pot imaginar com la de dues funcions de la mateixa freqüència però amb la seva fase relativa φ que varia lentament amb el temps, de la mateixa manera que es pot fer per analitzar conceptualment els batements; això fa que la gràfica vagi passant successivament per les configuracions: recta, el·lipse d'eixos inclinats, el·lipse d'eixos paral·lels als eixos x i y , el·lipse d'eixos inclinats en sentit contrari i recta de pendent contrària; a partir d'aquí passa per les mateixes configuracions però en sentit contrari, tal com es pot veure a la figura 1.20.

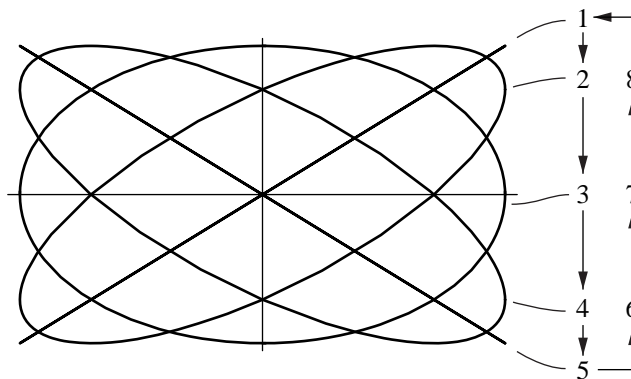


Figura 1.20. Composició de dues funcions harmòniques de fase variable.

S'anomenen corbes de Lissajous als gràfics de les funcions paramètriques definides per dues funcions harmòniques de freqüències iguals, com en el cas estudiat fins ara, o diferents:

$$x(t) = x_p \cos(2\pi f_1 t)$$

$$y(t) = y_p \cos(2\pi f_2 t + \varphi)$$

L'aparença d'aquestes corbes és sensible a la relació entre les freqüències f_1/f_2 . Tal com s'ha vist per a $f_1 = f_2$ corresponen a figures senzilles: recta, circumferència i el·lipse. Una altra figura senzilla és la paràbola que s'obté quan $f_1/f_2 = 2$ i $\varphi = 0^\circ$. Altres relacions de freqüències donen lloc a corbes més complicades que només són tancades si f_1/f_2 és racional (per ser tancades cal que tot es repeteixi exactament igual a partir d'un cert instant, tal com s'ha vist que ha de passar al sumar funcions harmòniques per tenir un resultat periòdic). L'aspecte visual d'aquestes corbes tancades sovint suggereix nusos tridimensionals i és agradable en particular si la relació de freqüències correspon a relacions racionals senzilles (alguns logotips les usen), vegeu la figura 1.21.

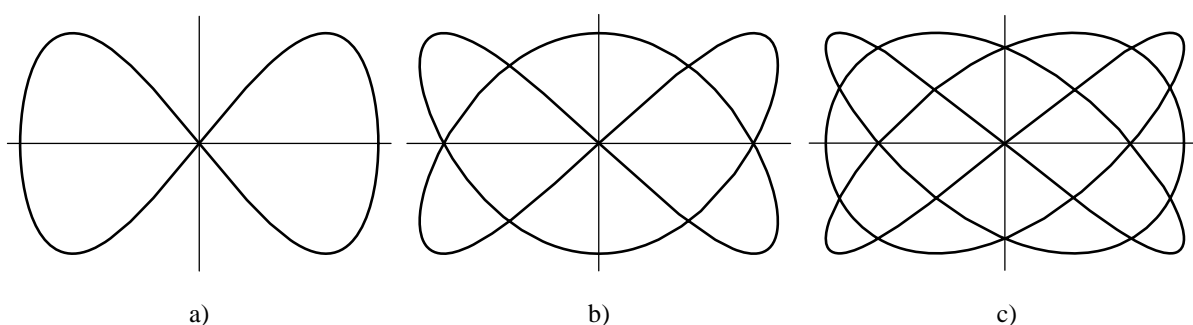


Figura 1.21. Corbes de Lissajous: a) $f_1/f_2 = 1/2$, $\varphi = 90^\circ$; b) $f_1/f_2 = 2/3$, $\varphi = 90^\circ$; c) $f_1/f_2 = 3/4$, $\varphi = 90^\circ$.

Si la relació de freqüències difereix lleugerament d'aquestes relacions racionals senzilles la seva composició es pot entendre, tal com s'ha vist anteriorment en el cas $f_1 = f_2$, com la composició de dues funcions de freqüències que compleixen la relació però amb la fase φ variable lentament en el temps; això fa que la corba vagi canviant de forma i doni lloc a una representació suggestiva que s'utilitza a vegades com a recurs gràfic en representacions dinàmiques, com per exemple en salvapantalles.

En l'àmbit de les vibracions les corbes de Lissajous amb $f_1/f_2 \neq 1$ tenen la seva utilitat en la identificació de senyals amb relació de freqüències racional.

1.5 Descripció dels senyals en el domini freqüencial

La detecció de les periodicitats d'una vibració i la seva descomposició en components de freqüència única –components harmònics– s'anomena anàlisi harmònica, freqüencial o espectral i és de màxim interès tant quan es desitja identificar les causes d'una vibració i valorar-ne els efectes com quan cal fer-ne un estudi analític.

Molts fenòmens que causen vibracions ho fan de manera que aquestes són periòdiques –per exemple els motors tèrmics alternatius en règim constant– o, fins i tot, simplement harmòniques –per exemple el desequilibri dels motors elèctrics rotatius. Per aquesta raó, en general, a partir de l'anàlisi freqüencial es poden identificar les causes de vibració.

Per altra part, el comportament dels sistemes –màquines, estructures, etc.– en front de les vibracions és lineal– a doble força, doble moviment– amb suficient aproximació en la gran majoria de casos. En ser aplicable, a aquests sistemes, el principi de superposició, és senzill predir els efectes d'una vibració com superposició dels efectes independents de cada una de les seves components harmòniques i també és senzill estudiar una vibració complexa d'aquests sistemes com superposició de vibracions de descripció més senzilla.

Per als sistemes lineals, existeix una teoria completa que fa intervenir de manera fonamental el contingut freqüencial de les vibracions –forces i moviments– i és la base sòlida en la que recolzen tots els treballs de vibracions –teòrics o pràctics, analítics o experimentals.

El gràfic o funció que, per a cada freqüència, indica el contingut de component harmònic de la vibració a aquesta freqüència s'anomena **espectre** de la vibració. Aquest contingut harmònic pot estar distribuït de manera més o menys contínua dins d'un rang de freqüències o pot estar concentrat en un conjunt discret de freqüències, ja sigui per la naturalesa del senyal o pel procediment de càlcul; en aquest cas es sol parlar d'espectre de ratlles i de ratlles espectrals associades a les diferents freqüències.

La figura 1.22 mostra l'esquema conceptual per a l'obtenció del contingut freqüencial d'un senyal. Aquest s'introdueix en un conjunt de filtres passabanda, cadascun dels quals només deixa passar els components de freqüència continguda en un interval B , ample de banda del filtre, situat a l'entorn d'una freqüència. Els filtres poden ser analògics, conjunt de components elèctrics o electrònics, si el senyal és analògic elèctric, com és normal, o digitals, conjunt d'operacions matemàtiques digitals, si el senyal és digital. La sortida de cada filtre s'acumula i amitjana de manera convenient per obtenir un valor finit de l'espectre; així per exemple, si el senyal que s'analitza és una suma de funcions harmòniques caldrà

amitjanar en el temps per tal que l'espectre sigui finit, ja que si només s'acumulés els resultats serien infinits pels filtres que deixen passar les freqüències d'aquestes funcions. Més endavant, es concreten els procediments adequats per als diversos tipus de senyals.

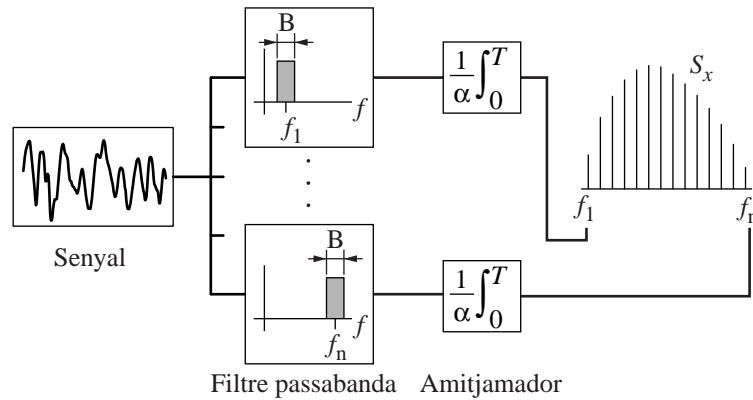


Figura 1.22. Esquema conceptual per a l'obtenció de l'espectre freqüencial.

A la figura 1.23 es poden veure 0,5 s de la història temporal d'una vibració aleatòria i el seu espectre, que s'ha representat utilitzant l'eix de les freqüències en escala logarítmica i l'eix del contingut espectral en dB. Es pot observar que la vibració presenta un contingut freqüencial sensiblement constant entre 3 Hz i 150 Hz, la qual cosa es pot interpretar com que la vibració és la superposició de vibracions harmòniques d'amplitud semblant i de totes les freqüències compreses entre aquestes 3 Hz i 150 Hz.

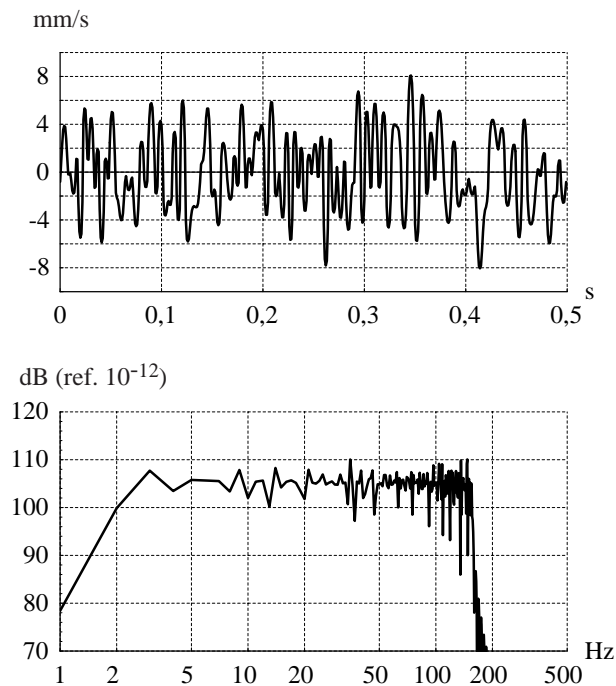


Figura 1.23. Representació temporal d'una vibració aleatòria i el seu espectre.

Per a cada tipus de senyal a analitzar cal utilitzar la tècnica adequada per realitzar l'anàlisi freqüencial, l'objectiu és tenir un espectre de valors finits fàcilment interpretables. En alguns casos però és proposa la utilització de funcions delta de Dirac.

1.5.1 Sèrie de Fourier

L'anàlisi freqüencial d'una vibració periòdica és normal fer-la a partir de la **sèrie de Fourier**. Si $x(t)$ és una vibració de període T pot expressar-se com la suma d'un valor mitjà – component continu o harmònic de freqüència nul·la–, normalment nul, i d'una sèrie de components harmònics segons l'expressió

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi f_k t) + b_k \sin(2\pi f_k t)] \quad \text{amb } f_k = k \frac{1}{T} \quad (17)$$

La freqüència $f_1 = 1/T$ rep el nom de freqüència fonamental o del primer harmònic, $f_2 = 2/T$ és la freqüència del segon harmònic i així successivament. Els coeficients a_0, a_1, a_2, \dots i b_1, b_2, \dots són les amplituds dels diferents components harmònics i es calculen amb les expressions següents:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt & a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi f_k t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi f_k t) dt \end{aligned} \quad (18)$$

L'expressió d'aquests coeficients es demostra fàcilment multiplicant la igualtat de l'expressió 17 per $\cos(2\pi f_k t)$ o $\sin(2\pi f_k t)$, integrant cada terme al llarg del període T i tenint en compte les relacions:

$$\int_0^T \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt = 0$$

A causa de la periodicitat de les funcions, els límits de les integrals per determinar els coeficients a_k i b_k -0 i T^- es poden substituir per $-T/2$ i $+T/2$. Aquesta substitució és freqüent més endavant per obtenir expressions formalment més simètriques.

La possibilitat de determinar la sèrie de Fourier d'una funció està condicionada al fet que aquesta sigui contínua a trams i que el seu quadrat sigui una funció integrable en un període

$$\int_0^T (x(t))^2 dt < \infty$$

Aquesta condició no representa cap problema per a les funcions o senyals que descriuen l'evolució de magnituds físiques ja que és pràcticament impossible que no es compleixin.

Malgrat que la sèrie de Fourier és teòricament infinita, a la pràctica normalment n'hi ha prou amb uns pocs harmònics per representar prou correctament el senyal original.

Es poden escriure altres expressions de la sèrie de Fourier utilitzant només funcions cosinus o utilitzant nombres complexos, que com s'ha vist permeten representar les funcions harmòniques.

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad \text{amb } c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{i } \varphi_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k}$$

$$x(t) = X_0 + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_k t} \right] \quad \text{amb } X_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{i } X_k = a_k - j b_k$$

Les relacions entre els coeficients d'aquestes expressions són

$$|X_0| = c_0, \quad |X_k| = c_k, \quad \arg(X_k) = \varphi_k$$

Si s'utilitza la notació complexa, el càlcul dels coeficients X_k es pot escriure també amb aquesta notació

$$X_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt$$

És interessant observar que, tot i perdre el significat físic, en el desenvolupament de la sèrie de Fourier es poden utilitzar freqüències positives i negatives, fet que sovint facilita aspectes teòrics i la manipulació matemàtica en l'anàlisi espectral. En aquest cas es pot escriure:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a'_k \cos(2\pi f_k t) + b'_k \sin(2\pi f_k t)] \text{ amb } f_k = k \frac{1}{T} \text{ i}$$

$$a'_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi f_k t) dt \quad b'_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi f_k t) dt$$

o en notació complexa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'_k e^{j2\pi f_k t} \quad \text{amb} \quad X'_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (19)$$

O, si es desitja tenir les dues expressions simètriques al voltant del 0:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'_k e^{j2\pi f_k t} \quad \text{amb} \quad X'_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (20)$$

Cal destacar que en aquestes formulacions els coeficients són la meitat que els d'abans menys el corresponent al valor mitjà –component continu o de freqüència nul·la– que manté el mateix valor. Pel que fa als angles de fase són de signe contrari per a freqüències de signe contrari. En notació complexa $X_k = X_{-k}^*$ és a dir X_k i X_{-k} són conjugats. La utilització de freqüències només positives o positives i negatives porta a parlar, aquí i en les altres descripcions freqüencials, d'espectres a una o a dues cares i sempre cal prestar atenció a la singularitat del terme corresponent a la freqüència nul·la.

La determinació dels coeficients de la sèrie de Fourier en general no es realitza analíticament ja que només per a funcions $x(t)$ molt concretes es poden calcular analíticament les integrals de les expressions 18 fàcilment. Per altra banda, cal tenir present que en l'estudi de vibracions els registres dels senyals que es volen analitzar provenen de la mesura experimental de les magnituds i, per tant, no és usual disposar de l'expressió matemàtica de $x(t)$, sinó que del què es disposa és d'un senyal digital. Més endavant es veurà quin tractament cal donar a aquest senyal per obtenir si més no una aproximació del contingut freqüencial del senyal analògic representatiu de la magnitud física analitzada. Si bé en l'àmbit de l'anàlisi de senyals representatius de magnituds físiques les funcions $x(t)$ són reals, és interessant tenir present que la sèrie de Fourier és aplicable també a funcions complexes.

En l'àmbit de l'anàlisi freqüencial cal fer atenció al **Teorema de Parseval**, que estableix que la potència o l'energia d'un senyal es pot calcular indistintament en el domini temporal o en

domini freqüencial. Per a un senyal periòdic i la seva sèrie de Fourier, el Teorema de Parseval expressa que:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Aquesta expressió posa de manifest que la potència mitjana de $x(t)$ calculada en un període és igual a la suma de la potència mitjana, calculada també en un període, dels components de la sèrie de Fourier. La potència d'un senyal continu és la seva amplitud al quadrat i la potència mitjana d'un senyal harmònic és el quadrat del seu valor eficaç, $c_{k\text{eficaç}} = c_k / \sqrt{2}$.

De nou, si s'utilitzen freqüències positives i negatives s'obté una expressió del Teorema de Parseval més compacta però de lectura més allunyada de la descripció física

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k{}^2 \quad \text{amb } c'_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

A la figura 1.24 es mostra un senyal periòdic, de període 1 s i el seu espectre en forma de dos gràfics de ratlles espectrals, un per als coeficients c_k i l'altre per als angles de fase. Aquests dos gràfics es poden reunir en un únic gràfic tridimensional representant en plans paral·lels, un per a cada harmònic, els nombres complexos X_k , de mòdul c_k i d'argument φ_k . Evidentment, es podrien fer els gràfics per als coeficients a_k i b_k del termes en cosinus i en sinus però no és tant usual.

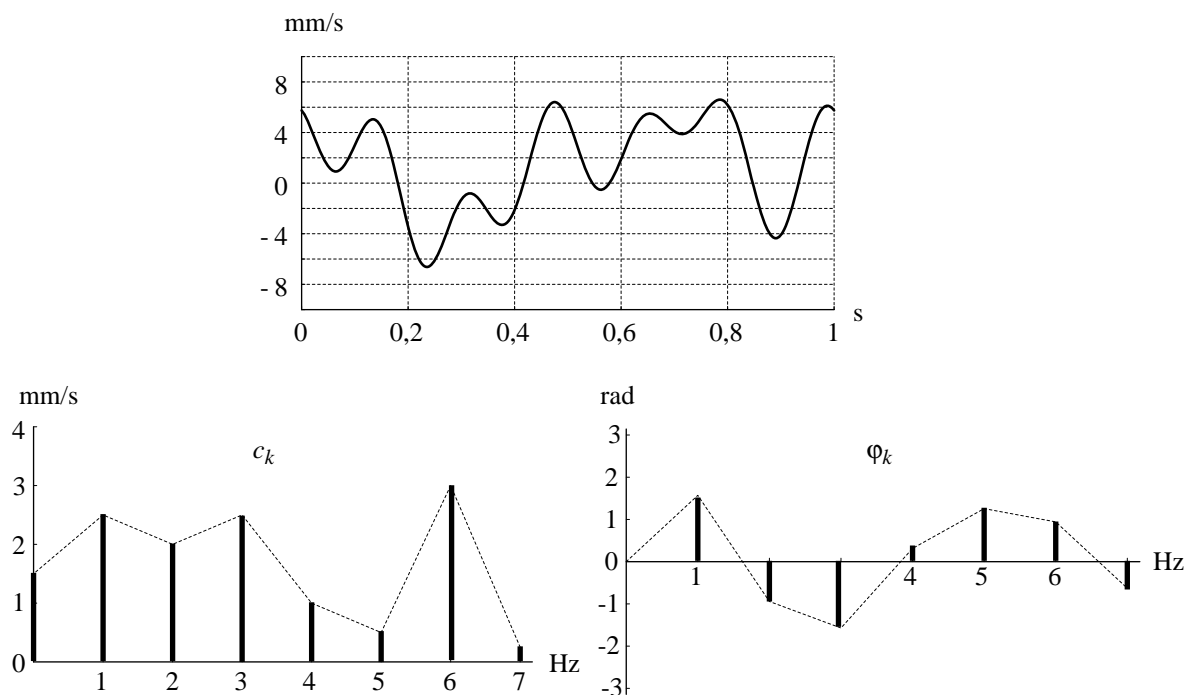


Figura 1.24. Senyal periòdic i el seu espectre freqüencial.

Sovint és interessant, i en certs casos l'única possibilitat, representar espectres relacionats amb l'energia o la potència –en el cas de senyals periòdics ja s'ha vist la relació entre la potència total i la dels components harmònics. A la figura 1.25 es mostren els espectres de potència a una cara, només freqüències positives, i a dues cares, freqüències positives i negatives, del senyal de la figura anterior; en els dos casos la suma de potències associades a cada freqüència, és la potència total del senyal.

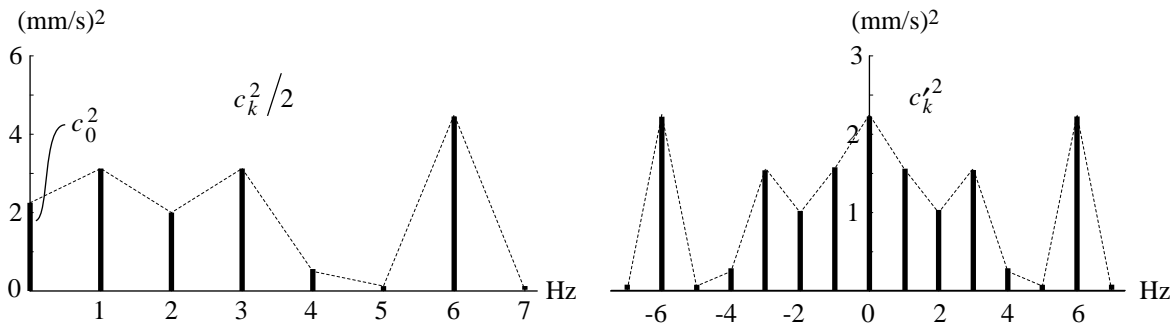


Figura 1.25. Espectres de potència a una i dues cares.

Observant les expressions 17 i 18 o millor 19 es veu que les operacions que comporta l'obtenció de la sèrie de Fourier d'una funció es poden entendre com un parell de transformacions simètriques: la primera que passa de $x(t)$ a X_k i la segona que ho fa de X_k a $x(t)$, és a dir X_k és la transformada de $x(t)$ i $x(t)$ és la transformada de X_k . Normalment, s'utilitza la paraula transformada per referir-se també a la transformació.

1.5.2 Transformada de Fourier en temps discret

Les transformacions, transformades definides a les expressions 20, tenen la mateixa estructura: un sumatori, si s'aplica a una sèrie de valors, o una integral si s'aplica a una funció contínua i el producte per una exponencial complexa que incorpora la informació de la freqüència dels components harmònics. Es pot aprofitar aquesta estructura simètrica de les dues transformacions per estudiar a partir de les expressions 19 o 20 el contingut freqüencial d'un senyal mostrejat en el temps (senyal digital, si com és usual es prescindeix de la quantificació que requereix la digitalització) a intervals Δt –freqüència de mostratge $f_m = 1/\Delta t$; simplement cal intercanviar les variables temps i freqüència i el signe dels exponents per mantenir la semblança de les transformacions, amb la qual cosa s'obté:

$$X(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r\Delta t) e^{-j2\pi f(r\Delta t)} \quad \text{amb} \quad x(r\Delta t) = \frac{1}{f_m} \int_0^{f_m} X(f) e^{j2\pi f(r\Delta t)} df \quad (21)$$

o:

$$X(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r\Delta t)e^{-j2\pi f(r\Delta t)} \quad \text{amb} \quad x(r\Delta t) = \frac{1}{f_m} \int_{-f_m/2}^{f_m/2} X(f)e^{j2\pi f(r\Delta t)} df \quad (22)$$

Aquestes expressions defineixen l'anomenada **Transformada de Fourier en temps discret** i posen de manifest que el contingut freqüencial d'un senyal mostrejat, $x_r = x(r\Delta t)$, és una funció $X(f)$ contínua i periòdica (com ho era la funció $x(t)$ de l'expressió 19). El període, en el domini freqüencial, de $X(f)$ es troba veient en quant, com a mínim, cal incrementar la freqüència per tal que tots els exponents s'incrementin en un múltiple de 2π ; així doncs

$$2\pi(f + f_T)(r\Delta t) = 2\pi f(r\Delta t) + 2\pi f_T(r\Delta t) \quad \text{i per tant} \quad f_T\Delta t = 1$$

Com que l'interval de mostratge Δt és l'invers de la freqüència de mostratge f_m resulta que la periodicitat de l'espectre és precisament igual a aquesta freqüència. S'arriba al mateix resultat tenint en compte que en la sèrie de Fourier la separació d'harmònics o de ratlles espectrals és igual a la freqüència fonamental –en el domini temporal– i per tant fent l'intercanvi de temps per freqüència, en la transformada de Fourier en temps discret, resulta que la separació de valors temporals $-\Delta t$ és igual al període –en el domini freqüencial.

L'expressió 22 posa de manifest que un senyal digital es pot reconstruir coneixent el seu contingut freqüencial únicament fins a la meitat de la freqüència de mostratge i, per tant, no conté informació freqüencial addicional més enllà d'aquesta freqüència. Aquest fet juntament amb el fet que també es pot reconstruir, a partir del senyal digital, el senyal analògic de partida si no té contingut freqüencial per sobre d'aquesta freqüència es coneix com **Teorema del mostratge de Nyquist-Shannon**. A la meitat de la freqüència de mostratge se l'anomena **freqüència de Nyquist**. Si el senyal analògic de partida no té contingut freqüencial més enllà de la freqüència de Nyquist, el senyal digital obtingut a partir d'aquest el representa correctament i permet trobar el seu contingut freqüencial. Per aconseguir aquesta situació, cal elegir la freqüència de mostratge tan alta com sigui possible en funció del sistema de digitalització de què es disposi i de la llargada del registre digital que es pugui i vulgui manipular; també cal limitar, abans de mostrejar, el contingut freqüencial del senyal analògic amb un filtre passa baixos que elimini les freqüències superiors a les de Nyquist de la configuració utilitzada. Els filtres utilitzats s'anomenen filtres **antialiasadors**.

Si el senyal que es digitalitza conté freqüències superiors a la de Nyquist, a partir del senyal mostrejat no es pot recuperar el senyal de partida, ni calcular-ne adequadament el contingut freqüencial ja que queda distorsionat, fins i tot per sota de la freqüència de Nyquist; a aquest fet se l'anomena efecte **aliasador** del mostratge. L'efecte aliasador dona lloc a fenòmens

curiosos com la sensació, en veure una pel·lícula (que és un mostratge de la realitat), que una roda de radis gira al revés del que li toca segons el sentit d'avanç. Un altre efecte, que posa de manifest la impossibilitat de reconstruir el senyal analògic si la freqüència de mostratge no és l'adequada, s'obté quan es representa una funció harmònica amb una freqüència de mostratge propera a la seva freqüència. A la figura 1.26 s'observa el gràfic de la funció $\sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t)$ mostrejada a 10 Hz i a 1 Hz. En el segon cas, de fet el que s'observa és una funció harmònica de freqüència 0,1 Hz.

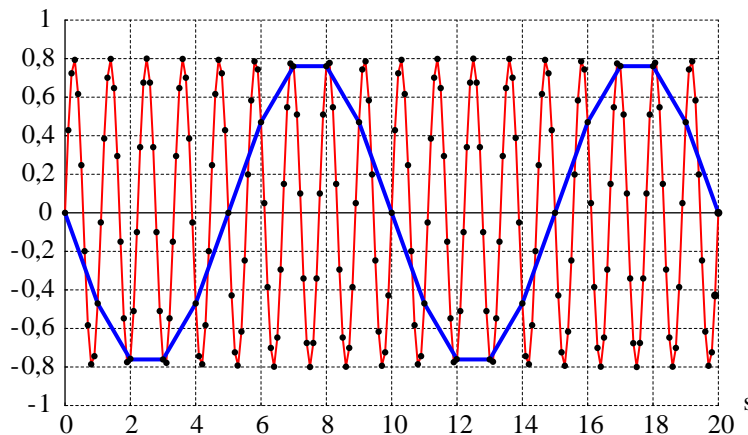


Figura 1.26. Senyal harmònic de freqüència 0,9 Hz mostrejat a 10 Hz (traç vermell fi) i a 1 Hz (traç blau gruixut)

Es pot fer una nova lectura del cas presentat a la figura 1.26 per explicar l'efecte aliasador i la distorsió de l'espectre. Amb una freqüència de mostratge $f_m = 1$ Hz, i per tant una freqüència de Nyquist de $f_N = 0,5$ Hz, una freqüència $f_{real} = 0,9$ Hz es veu com una freqüència $f_{àlies} = 0,1$ Hz, de manera que en mostrejar un senyal analògic al contingut espectral de 0,1 Hz se li suma el de 0,9 Hz. Es comprova que per a freqüències superiors a la Nyquist sempre es verifica (àlies és un mot llatí amb significat d'altre lloc, d'altre moment, d'altra manera)

$$f_{real} - f_m/2 = f_{àlies} + f_m/2 \quad \text{o} \quad f_m - f_{real} = f_{àlies}$$

1.5.3 Transformada contínua de Fourier

Fins ara, s'ha estudiat el contingut freqüencial d'un senyal analògic periòdic utilitzant la sèrie de Fourier i el d'un senyal mostrejat utilitzant la Transformada de Fourier en temps discret. Cal estudiar també el contingut freqüencial d'un senyal analògic no periòdic i posteriorment relacionar-ho amb els resultats ja obtinguts. Conceptualment, un senyal no periòdic podria interpretar-se com un senyal periòdic de període que tendeix a infinit. En aquest cas, la separació entre les ratlles espectrals, inversa del període, es va fent petita i l'espectre del senyal tendeix a adquirir un aspecte continu. Alhora, en principi, les amplituds

dels components harmònics decreixen en repartir-se la potència mitjana del senyal entre un nombre més gran de components espectrals i, per tant, tendeixen, en general, a zero. Aquest punt es pot resoldre no dividint pel temps en la transformació, fet que porta a parlar d'energia en lloc de potència mitjana.

De fet, els senyals que s'analitzen a continuació són senyals no periòdics, transitoris d'energia finita, que es defineixen de manera que compleixen la condició següent

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

Aquesta condició des del punt de vista pràctic implica que el senyal és no nul en un interval finit, si bé cal entendre que teòricament es poden presentar situacions de tendència asimptòtica a 0. Així doncs, aquesta condició descriu en principi magnituds de fenòmens de durada finita.

L'anàlisi freqüencial d'un senyal transitori d'energia finita $x(t)$ és normal fer-lo per mitjà de **la Transformada Contínua de Fourier**. Un transitori d'energia finita es pot expressar com:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{amb} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (23)$$

Propietats

Es pot observar la semblança d'aquestes expressions amb les expressions 20. Ara però, la funció $X(f)$ que descriu el contingut freqüencial és contínua i en la seva determinació no es divideix pel temps. Igual que en la sèrie de Fourier, les expressions 23 defineixen dues transformacions simètriques: una que passa del domini temporal al domini freqüencial $X(f)$ i l'altre que ho fa al revés. $X(f)$ s'anomena la transformada de Fourier de $x(t)$. Normalment, la paraula transformada s'utilitza també per referir-se a les transformacions, de manera que a la transformació de $x(t)$ a $X(f)$ se l'anomena Transformada Directa de Fourier –TF– i a la transformació de $X(f)$ a $x(t)$ se l'anomena Transformada Inversa de Fourier –TF⁻¹– (és usual prescindir de la denominació de contínua). Les Transformades de Fourier són transformacions lineals i per tant es compleix que

$$\text{TF}[c(x(t) + y(t))] = c(\text{TF}[x(t)] + \text{TF}[y(t)])$$

La possibilitat de determinar la Transformada Contínua de Fourier d'una funció està condicionada al fet que, a més de ser d'energia finita, sigui contínua a trams. Aquestes

condicions no representen cap problema per a les funcions o senyals que descriuen l'evolució de magnituds físiques de fenòmens transitoris, sempre que es tingui la precaució de no prendre magnituds que es mantenen constants però no nul·les fora del transitori. Aquest seria, per exemple, el cas d'un transitori de velocitat per canviar el sentit del moviment.

La Transformada Directa de Fourier verifica que $X(f) = X^*(-f)$, és a dir $X(f)$ i $X(-f)$ són conjugades, sempre i quan la funció que s'analitza sigui real com és el cas que es considera en aquest text. La Transformada Directa de Fourier es pot realitzar també de funcions temporals complexes; aleshores deixa de complir-se la propietat i la condició d'energia finita que s'expressa com

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

És interessant també assenyalar que si el senyal $x(t)$ que s'analitza és parell, $x(-t) = x(t)$, la seva Transformada de Fourier és real, i com a conseqüència de la propietat anterior és també simètrica.

A la figura 1.27 es mostra un senyal transitori, un pols rectangular de 0,2 s de durada i d'alçada unitària; i el seu espectre en forma dels gràfics de la part real i de la part imaginària de la seva transformada contínua de Fourier.

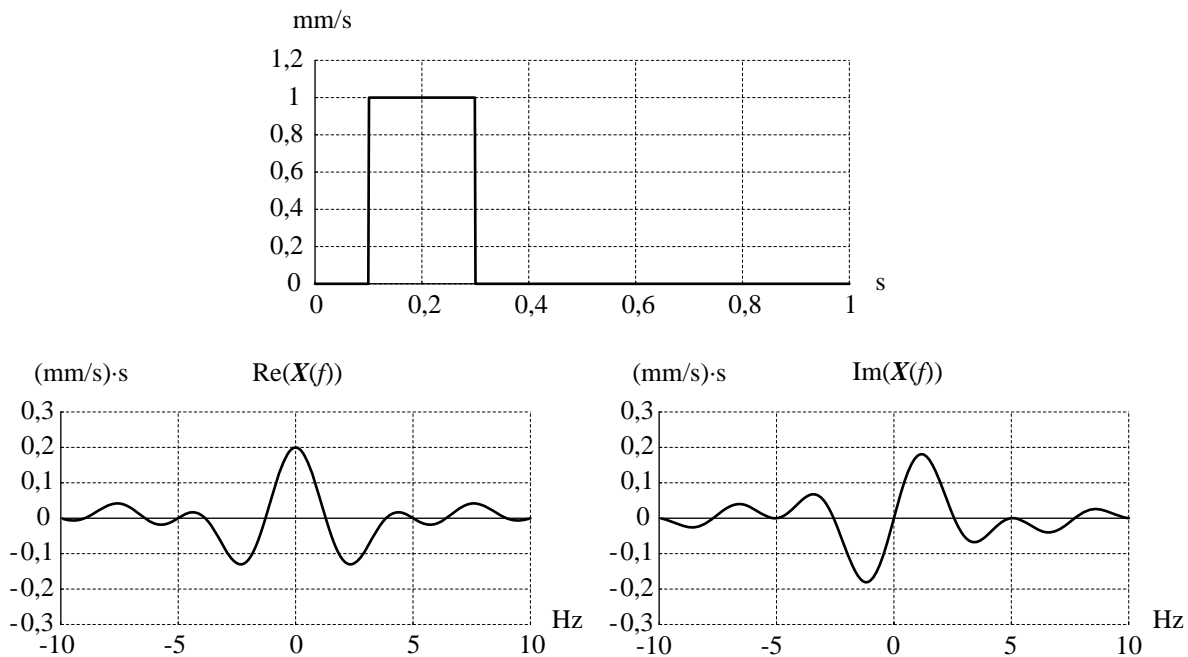


Figura 1.27. Senyal transitori i el seu espectre freqüencial en forma de transformada de Fourier.

Una de les propietats més rellevants de la Transformada de Fourier en l'anàlisi de senyals és que l'operació del producte de funcions es transforma en el **producte de convolució** de les transformades de les funcions, representat per * i definit a les expressions següents

$$\text{TF}[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \mathbf{X}_1(f) * \mathbf{X}_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_1(f - f') \cdot \mathbf{X}_2(f') df'$$

També el producte de transformades és la transformada del producte de convolució de les funcions de partida

$$\mathbf{X}_1(f) \cdot \mathbf{X}_2(f) = \text{TF}[x_1(t) * x_2(t)] = \text{TF}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-t') \cdot x_2(t') dt'\right]$$

Aquesta propietat és de particular utilitat en dos àmbits: i) en l'estudi de la incidència en els espectres del fet de no agafar tot el senyal original per fer els càlculs, ii) en l'estudi del comportament dels sistemes dinàmics estables i causals de comportament lineal —els sistemes mecànics vibratoris en són un cas. En aquests sistemes, la Transformada de Fourier de la sortida $y(t)$ a causa d'una entrada $x(t)$ es pot trobar mitjançant el producte de convolució de la resposta impulsional del sistema $h(t)$ per l'entrada $x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

o, si existeix la Transformada de Fourier de l'entrada, mitjançant el producte de la resposta harmònica del sistema $\mathbf{H}(f)$, que és la Transformada de Fourier de la resposta impulsional $h(t)$, per la Transformada de Fourier $\mathbf{X}(f)$ de l'entrada $x(t)$

$$y(t) = \text{TF}^{-1}[\mathbf{H}(f) \cdot \mathbf{X}(f)] \quad \text{on} \quad \mathbf{H}(f) = \text{TF}[h(t)] \quad \text{i} \quad \mathbf{X}(f) = \text{TF}[x(t)]$$

L'operació inversa a la convolució és la **desconvolució** i es pot utilitzar per intentar recuperar, en el domini temporal o freqüencial, un senyal que ha estat convolucionat amb un altre de conegut. Aquest seria, per exemple, el cas de voler trobar l'entrada a un sistema de resposta impulsional o freqüencial coneguda a partir de la sortida desitjada. Un cas força freqüent és la **identificació de sistemes** que consisteix a determinar la resposta freqüencial d'un sistema a partir d'un senyal d'entrada i de la resposta del sistema a aquest senyal. La desconvolució si bé és fàcil conceptualment, en els casos comentats i en el domini freqüencial és una simple divisió freqüència a freqüència, pot presentar dificultats, típicament a les zones on l'espectre que ocupa el denominador tendeix a tenir valor petits. Per valorar la bondat de la identificació s'utilitza la funció de **coherència** que és una funció

real entre 0 i 1 que dóna una mesura de la correlació lineal a cada freqüència entre l'entrada i la sortida del sistema. Idealment val 1 entre els senyals a l'entrada i a la sortida d'un sistema lineal, però tendeix a 0 a mesura que aquests senyals deixen de ser correlats a causa ja sigui de la no linealitat del sistema o de la presència de soroll en la mesura dels senyals.

A la figura 1.28 esquerra es mostra la funció d'energia finita definida a l'expressió 24 i el mòdul de la seva Transformada de Fourier per a freqüències positives. A la figura 1.28 dreta es mostra la funció anterior multiplicada per un pols unitari entre 0,2 s i 0,5 s i la seva Transformada de Fourier. La funció resultant del producte no és més que la funció original retallada pel davant i pel darrera i la seva Transformada de Fourier és el producte de convolució de la Transformada de Fourier de la funció original per la Transformada de Fourier de la funció pols (figura 1.27). S'observa que el pic de l'espectre és de valor inferior, la qual cosa és raonable ja que ara els límits efectius de la integral de la Transformada de Fourier són menors, però també és molt aparent l'augment d'amplada del pic. Aquest augment d'amplada del pic o dispersió del producte respecte a les funcions de partida és característic del producte de convolució i, per tant, apareix sempre que es retalla temporalment un senyal fent-ne el producte amb una funció nul·la fora d'un interval de temps –**finestra temporal**. S'anomena efecte de **dispersió –leakage**, en la bibliografia anglesa– causat per la limitació de la durada del registre de senyal analitzat i cal tenir-lo present ja que no és estrany que per raons diverses s'hagi de limitar aquesta durada. També es fa referència a aquest efecte com a la disminució de la resolució –a causa de l'augment d'amplada dels pics– causada per la disminució de la llargada del registre.

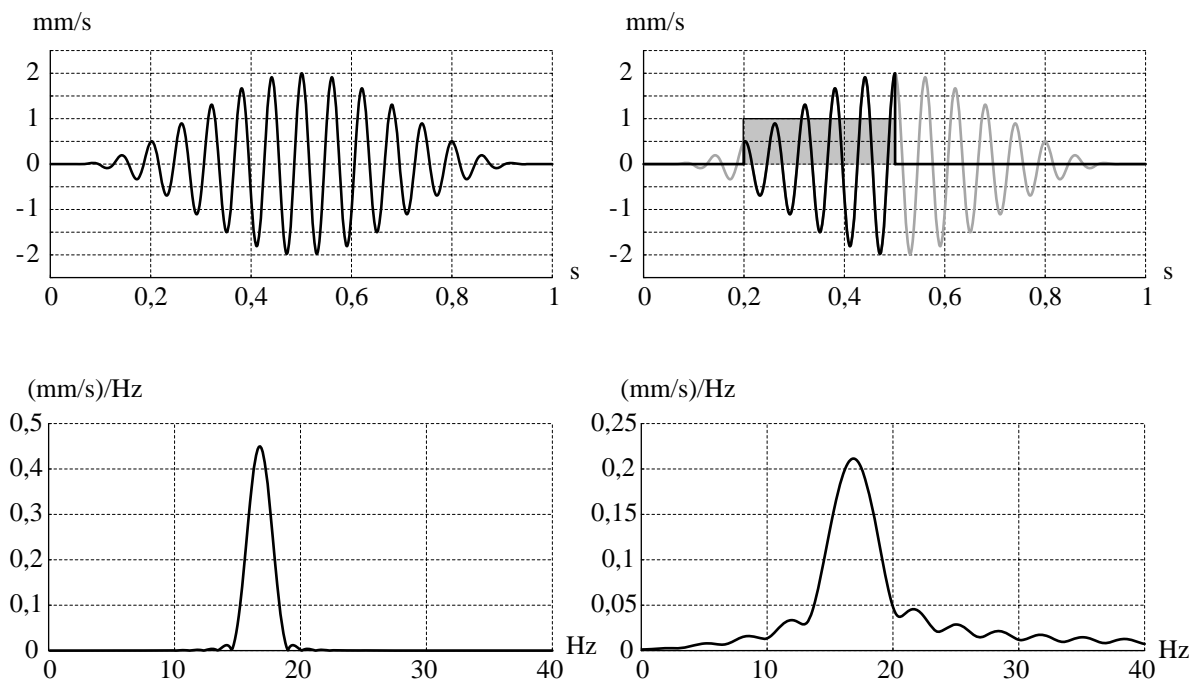


Figura 1.28. Comparació de les Transformades de Fourier d'una funció i del producte d'aquesta funció per un pols. Efecte de dispersió.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,05 \\ (\cos(2\pi(1/0,9)t) - 1) \cdot \cos(2\pi(15/0,9)t) & 0,05 \leq t \leq 0,95 \\ 0 & t > 0,95 \end{cases} \quad (24)$$

La definició que es dóna de les transformades directa i inversa de Fourier és la més usual en el context de l'enginyeria. És possible, però, trobar d'altres definicions que difereixen d'aquestes en certs aspectes:

Si la variable d'integració de la transformada inversa és ω en lloc de f aleshores apareix el factor $1/2\pi$ que pot quedar dividint la transformada inversa, la transformada directa o repartit entre ambdues en forma de $1/\sqrt{2\pi}$.

El signe de l'exponent en la transformada directa pot ser positiu, com en la definició presa, o negatiu. Aquest canvi de signe té com a conseqüència un canvi de signe de la part imaginària de la transformada.

Aquestes variacions només afecten en el cas de quedar-se com a resultat de l'estudi la transformada directa de Fourier o una conseqüència d'aquesta, com per exemple la resposta freqüencial. Si es fan servir amb coherència ambdues transformades, per passar del domini temporal al freqüencial i tornar al temporal, no hi ha diferència de resultats.

Densitat Espectral d'Energia

El teorema de Parseval per a un senyal transitori d'energia finita i la seva transformada de Fourier estableix que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Aquesta expressió posa de manifest que l'energia del senyal es pot calcular tant en el domini temporal com en el domini freqüencial; cal notar que en aquest cas no s'integra el quadrat de la transformada, que és complexa, sinó el quadrat del seu mòdul. El terme $|X(f)|^2 df$ es pot interpretar com la quantitat d'energia que té el senyal a l'entorn de la freqüència f i per aquesta raó a $|X(f)|^2$ se l'anomena **Densitat Espectral d'Energia –DEE–** i és usual representar-la per S_E . Si la unitat de $x(t)$ és u la unitat de la seva densitat espectral d'energia és $(u^2 \cdot s)/\text{Hz}$.

Per referir-se i representar la densitat espectral d'energia poden utilitzar-se de nou freqüències positives i negatives, espectre a dues cares, o només freqüències positives,

espectre a una cara. En aquest segon cas, més proper a la realitat física, és usual representar l'espectre per G_E . A partir de la Densitat Espectral d'Energia l'energia del senyal és

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(f) df = \int_0^{\infty} G_E(f) df$$

A la figura 1.29 es mostra la densitat espectral d'energia a dues cares i a una cara del pols de la figura 1.27.

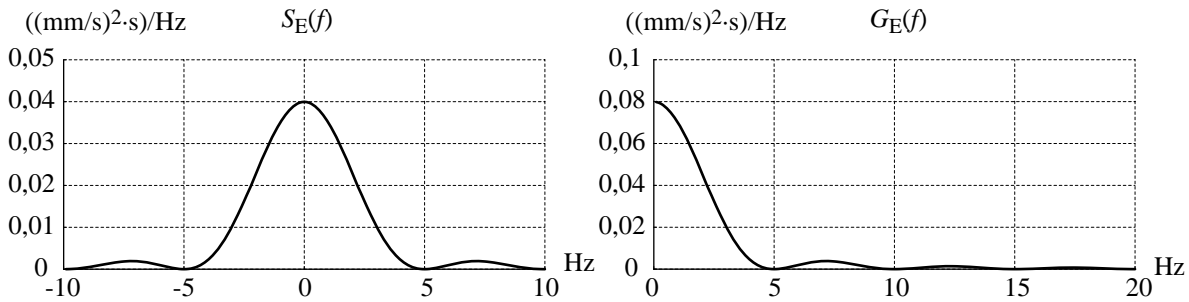


Figura 1.29. Densitat espectral d'energia d'un pols rectangular.

Transformada de Fourier de senyals periòdics o quasiperiòdics

És possible estendre l'ús de la transformada de Fourier al cas de senyals no transitoris, periòdics o quasiperiòdics, fent ús de la **funció impuls o delta de Dirac**, que cal recordar que es defineix com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ i } \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

Malgrat el seu nom, aquesta funció no és estrictament una funció en el sentit matemàtic usual ja que no compleix totes les propietats corresponents; ara bé, és una eina excel·lent per representar magnituds concentrades a l'entorn de punts discrets –des del punt de vista físic és equivalent, per exemple, a la consideració d'una massa, o una càrrega elèctrica, puntual. Es pot interpretar com un apuntador sobre l'eix de l'argument de la funció, el temps o la freqüència en el cas de l'anàlisi de vibracions, que indica on hi ha la magnitud concentrada; $\delta(t - t_0)$ indica que la magnitud es troba a t_0 . Si el valor de la magnitud no és unitari només cal multiplicar la funció per aquest valor. Es pot considerar que la funció graó unitari, funció de Heaviside, és la integral de l'impuls; conceptualment, tot s'acumula en passar per l'impuls.

Per a l'aplicació proposada cal tenir present les següents transformades de Fourier

$$\begin{aligned}
\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t)] &= (1/2)[\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \\
\text{TF}[\sin(2\pi f_1 t)] &= (1/2)[-\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]j \\
\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t + \varphi)] &= (1/2)[e^{j\varphi}\delta(f - f_1) + e^{-j\varphi}\delta(f + f_1)] \\
\text{TF}[1] &= \delta(t) \\
\text{TF}[\delta(t)] &= 1; \quad \text{TF}[\delta(t - t_0)] = e^{j2\pi f t_0}
\end{aligned} \tag{25}$$

Queda clar amb les transformades mostrades a 25 que amb l'espectre proposat ara per a les funcions periòdiques o quasiperiòdiques els impulsos indiquen que el contingut freqüencial es troba concentrat, com és evident, a les freqüències dels components harmònics. De fet, ja s'ha comentat la semblança entre la Sèrie de Fourier i la Transformada de Fourier i en prescindir en aquesta del concepte de període es pot fer extensiva als senyals quasiperiòdics. Com a contrapartida, en no dividir pel període, la contribució dels components harmònics en la integral de l'expressió 23 de la transformada es fa infinit. S'obté el mateix espectre tant si l'alçada de les ratlles espectrals és proporcional a l'amplitud dels components harmònics –Sèrie de Fourier– com si és proporcional a l'àrea dels impulsos –Transformada de Fourier. És interessant observar que si es passa a considerar l'espectre d'impulsos d'integral igual al quadrat de la meitat de l'amplitud es té l'espectre de potència mitjana; cal, però, notar que aquests impulsos no es defineixen a partir del quadrat dels impulsos associats a les amplituds. Finalment, és normal treballar amb espectres de potència mitjana a una cara tenint la precaució d'assignar a cada freqüència, menys a la freqüència nul·la, el doble de la potència assignada en els espectres a doble cara. De fet aquesta precaució queda palesa si s'observen les expressions 25: per a les freqüències no nul·les la Transformada de Fourier té dos impulsos de valor 1/2 i per al terme constant és un impuls de valor 1.

Espectre de senyals aleatoris

Per tal de caracteritzar freqüencialment un senyal aleatori estacionari no és possible emprar la transformada de Fourier, perquè no és d'energia finita, ni tampoc no té només components harmònics que permetin el tractament proposat en els paràgrafs anteriors mitjançant funcions Delta de Dirac. La funció d'autocorrelació $R_x(\tau)$ d'un senyal, tal com s'ha dit anteriorment, reté informació de la periodicitat del senyal i és per això que es proposa ara com a punt de partida. La funció d'autocorrelació d'una funció aleatòria, que no contingui components harmònics, tendeix a 0, si el valor mitjà és nul, i és una funció d'energia finita; així doncs, en aquestes condicions existeix, i té valor finits, la Transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació calculada segons l'expressió

$$S_P(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

i es demostra que es verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_P(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (26)$$

Aquesta propietat de S_P justifica el seu nom de **Densitat Espectral de Potència –DEP–** i també la seva aplicació per descriure el contingut freqüencial del senyal de partida. El segon terme de la igualtat de l'expressió 26 és la potència mitjana total del senyal, calculada per a l'interval d'observació T tan gran com sigui possible. Per tant, S_P es pot interpretar com la densitat de potència a cada freqüència i $S_P df$ com l'aportació d'aquesta freqüència a la potència total.

La funció d'autocorrelació és una funció parella i això fa que S_P sigui real, tal com ha de ser perquè es pugui complir la igualtat de 26, i parella. Aquest fet permet definir

$$G_P(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad \text{per a } f \geq 0$$

que equival, simplement i com en els casos anteriors, a utilitzar només freqüències positives i fer servir l'espectre a una cara o dues cares segons convingui. A la figura 1.30 es mostren 0,5 s d'un senyal aleatori i la seva densitat espectral de potència.

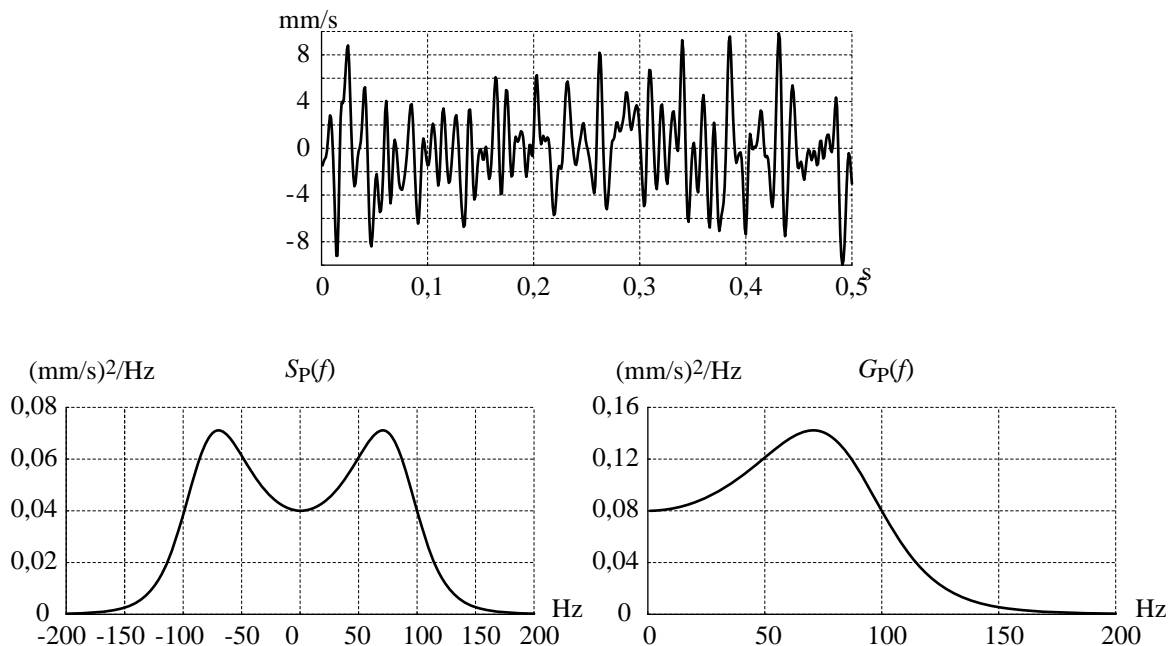


Figura 1.30. Senyal aleatori i la seva densitat espectral de potència.

Tot i que inicialment s'ha considerat que el senyal que s'analitza és estrictament aleatori de valor mitjà nul, té interès considerar la presència tant d'un component continu –valor mitjà no nul– com de components periòdics. Els tres tipus de components poden aparèixer junts i sovint un o altre és soroll no desitjat, causat per condicions ambientals o pels propis captadors de les magnituds físiques a analitzar. Així per exemple: i) hi ha captadors que la sortida no és nul·la tot i ser-ho l'entrada, ii) si el nivell de la magnitud que es mesura és baix el senyal que genera pot ser del mateix ordre que el soroll aleatori propi dels instruments de mesura, iii) els camps electromagnètics poden afectar els instruments de mesura i tenir senyals amb un contingut no negligible de components periòdics de la freqüència de la xarxa elèctrica. La presència d'aquests components continu i harmònics es reproduïx a la funció d'autocorrelació de manera que en fer-ne la Transformada de Fourier per obtenir la densitat espectral de potència apareixen en l'espectre els impulsos de Dirac estudiats anteriorment. Aquests impulsos es poden interpretar senzillament com la mesura de l'aportació finita de potència dels components continu o harmònics a la seva freqüència.

Espectres per bandes freqüencials

A partir de la Densitat Espectral, ja sigui de potència o d'energia, es pot calcular per integració la potència o l'energia dins d'un interval de freqüències o banda freqüencial, definit per les freqüències inferior i superior o per la freqüència central i l'amplada de interval, amplada de banda. Per a la banda B entre f_1 i f_2

$$S_E(B) = \int_{f_1}^{f_2} S_E(f) df$$

$$S_P(B) = \int_{f_1}^{f_2} S_P(f) df$$

Si es defineix un conjunt de bandes contigües

$$\text{Energia Total} = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(f) df = \sum_i S_E(B_i) \tag{27}$$

$$\text{Potència Total} = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(f) df = \sum_i S_P(B_i)$$

A partir de l'energia o la potència d'aquestes bandes contigües es pot representar l'**Espectre d'Energia** o l'**Espectre de Potència**, que són espectres discrets, que depenen de l'amplada de banda utilitzada i que es solen anomenar i representar gràficament com espectres de barres. Si s'utilitzen espectres a dues cares és normal prendre bandes freqüencials simètriques respecte a l'origen de freqüències i cal fer atenció a que la banda d'amplada Δf i

centrada en el 0 Hz va des de $-\Delta f/2$ a $\Delta f/2$. Aquest fet, que no presenta cap problema aquí, cal analitzar-lo amb detall quan es passa a considerar l'espectre a una cara. Si l'espectre a una cara s'obté a partir del de a dues cares, i es pren $i = 0$ per a la banda de freqüència central nul·la està clar que per garantir les expressions 27, i donada la simetria de l'espectre S cal que es compleixi

$$\begin{aligned} G_E(B_i) &= 2S_E(B_i) \text{ per a } i > 0 ; & G_E(B_0) &= S_E(B_0) \\ G_P(B_i) &= 2S_P(B_i) \text{ per a } i > 0 ; & G_P(B_0) &= S_P(B_0) \end{aligned} \quad (28)$$

Si l'espectre a dues cares és raonablement continu l'espectre a una cara pot presentar un notable salt, si el contingut freqüencial a molt baixa freqüència no és petit, entre la primera i la segona banda espectral a causa de les expressions 28. Aquest problema desapareix si es pren la freqüència nul·la com a límit inferior de la primera banda de freqüències positives; aleshores cal tenir la precaució d'indicar-ho ja que és usual prendre la freqüència central d'una banda com la nominal, i en aquest cas la primera banda de l'espectre a una cara no estaria associada a la freqüència nul·la. Aquests fets poden passar desapercebuts quan es prescindeix, o no es presta atenció, a les bandes de freqüència més baixa a causa que el contingut de potència en elles és negligible, situació no estranya en l'anàlisi de vibracions.

En integrar la densitat espectral de potència els seus possibles impulsos, provinents del component continu o de components harmònics, passen a ser increments finits dels valors de la integral de la banda freqüencial en la que es troben. Així doncs, treballar amb l'espectre de potència té un gran avantatge ja que unifica amb valors finits, i per tant representables fàcilment tant numèricament com gràficament, els espectres dels senyals no transitoris –periòdics, pseudoperiòdics i aleatoris. Per als senyals transitoris d'energia finita tant l'espectre d'energia com la densitat espectral d'energia són finits.

La presència de components harmònics, o del component continu, en l'espectre de potència és fàcilment detectable. El component aleatori es reparteix més o menys de manera uniforme i contínua en l'espectre; això fa que si es passa, per exemple, a un espectre amb doble nombre de bandes d'amplada meitat l'energia de les noves bandes serà aproximadament la meitat de les anteriors (la suma s'ha de conservar). Ara bé, la potència d'un component harmònic no es divideix, només contribueix a la banda que conté la seva freqüència i per tant la variació d'aquesta banda serà ostensiblement menor del que li tocaria si no hi hagués el component harmònic, la qual cosa permet reconèixer la seva presència.

A la figura 1.31, fila superior, es presenta l'espectre d'energia en bandes freqüencials de 1 Hz del pols de la figura 1.27 i a la fila inferior d'aquesta figura es mostra l'espectre de

potència en bandes freqüencials de 10 Hz del senyal aleatori de la figura 1.30. És interessant observar que l'espectre d'energia, en ser l'ample de banda 1 Hz, té valors molt propers a la densitat espectral d'energia a les freqüències centrals de les bandes. A l'espectre de potència, els valors són aproximadament 10 vegades superiors a la densitat espectral de potència a les freqüències centrals de les bandes, situació raonable ja que ara l'ample de banda és de 10 Hz.

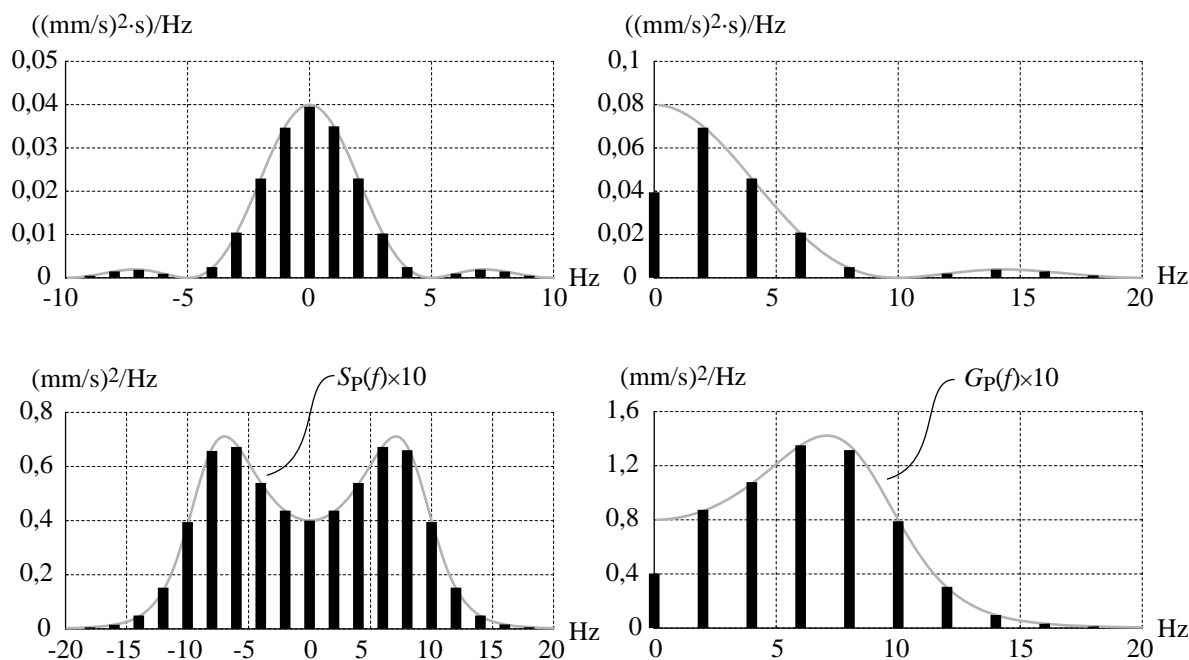


Figura 1.31. Espectres d'energia d'un pols i espectres de potència d'un senyal aleatori a dues i una cara.

1.5.4 Transformada discreta de Fourier

Com ja s'ha comentat, en l'anàlisi de vibracions no és usual disposar de la descripció analítica dels senyals, ja que provenen de mesures experimentals de magnituds de sistemes més o menys complexos amb excitacions que també poden ser més o menys complicades i sovint desconegudes. A aquests fets cal afegir-hi el soroll dels senyals, causat pel propi sistema de mesura i per l'entorn. Tot això fa que el procés d'obtenció de l'espectre freqüencial no pugui ser analític i hagi d'implementar-se de manera analògica o digital.

L'obtenció de l'espectre freqüencial mitjançant recursos analògics va ser durant uns anys, l'únic procediment viable disponible, i encara avui en dia constitueix una eina que no cal bandejar per a algunes aplicacions. Es basa en la utilització de filtres analògics passa-banda que poden ser de característiques diverses (ample de banda constant o proporcional, de freqüència central fixa o sintonitzable, etc.) i els corresponents circuits amittjanadors. La utilització d'altres filtres analògics (passa-alt, passa-baix, refusa-banda i de ponderació) és també un recurs vàlid i necessari en certes ocasions per, si més no, manipular

convenientment el contingut freqüencial dels senyals. Un cas evident és la utilització dels filtres antialiasadors abans de digitalitzar els senyals per eliminar el contingut freqüencial per sobre de la freqüència de Nyquist.

L'obtenció de l'espectre freqüencial per procediments digitals pot seguir dos camins:

Utilització de filtres digitals que poden simular el comportament dels filtres analògics, clàssics (Butterworth, Chebyshev, Bessel...) o no, que es caracteritzen perquè la seva resposta impulsional és infinita en el temps –filtres IIR– i també filtres digitals de resposta impulsional finita en el temps –filtres FIR. Aquests filtres digitals requereixen, en principi, algorismes implementats en processadors digitals específics si cal que actuïn en temps real. A la sortida dels filtres s'incorporen, si escau, els algorismes d'amitjanament adequats.

Utilització de la **Transformada Discreta de Fourier** i manipulació i interpretació adequada dels seus resultats.

En aquest text, es descriu amb cert detall la utilització de la Transformada Discreta de Fourier com eina per a l'obtenció numèrica dels espectres explicats en els apartats anteriors. En primer lloc, es defineix i es presenten les seves propietats més rellevants en l'estudi de les vibracions, i a continuació s'estudia la seva aplicació.

La Transformada Discreta de Fourier fa referència, de fet i com en les altres ocasions, a un parell de transformacions –la transformació directa i la transformació inversa– el producte de les quals és la identitat, és a dir que aplicant primer una i després l'altra es retorna al punt de partida. La **Transformada Discreta de Fourier Directa –TDF–** d'una sèrie x_r de N valors complexos és una altra sèrie de valors complexos X_k definida per

$$X_k = \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-j2\pi k r / N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (29)$$

i la **Transformada Discreta de Fourier Inversa –TDF⁻¹–** de la sèrie X_k és

$$x_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi k r / N} \quad r = 0, \dots, N-1 \quad (30)$$

Aquestes dues expressions són les més habituals en l'àmbit de l'enginyeria, però cal tenir present que es poden trobar altres definicions. Així, per exemple, el coeficient $1/N$, que és

necessari per a la identitat del producte de les dues transformades, es pot trobar a la TDF⁻¹ com es proposa, a la TDF, o repartit entre ambdues en forma de $1/\sqrt{N}$. Els subíndexs poden anar d'1 a N , en lloc de 0 a $N-1$, i aleshores en els exponents es resta una unitat. Fins i tot, l'elecció del signe de l'exponent, que ha de ser contrari en una i altra transformació, no deixa de ser convencional; és cert, però, que tal com s'ha pres és coherent amb les definicions fetes fins ara de les altres transformades de Fourier.

L'expressió 30 es pot entendre com que x_r és una superposició de sèries harmòniques $e^{(j2\pi k/N)r}$ funció de r , una per a cada valor de k . El pes sobre el total de cada sèrie harmònica X_k es calcula amb l'expressió 29 (de fet cal incloure el factor $1/N$). Amb aquesta interpretació la TDF permet l'estudi del contingut en sèries harmòniques de la sèrie x_r .

La semblança de les expressions 29 i 30 fa evident la igualtat de les propietats d'una i altra transformada, al marge del factor $1/N$, de manera que si no és necessari només es fa referència a una d'elles.

Les transformades discretes de Fourier són periòdiques en el sentit que si s'estenen més enllà de l'interval de la definició, $0 \leq k < N$ per a la directa i $0 \leq r < N$ per a la inversa, els resultats es repeteixen. Es demostra fàcilment veient, per exemple, que si $k' = k + N$ l'exponent s'incrementa en un múltiple de $2\pi j$ i per tant l'exponencial manté el seu valor

$$e^{-2\pi k' r j/N} = e^{-2\pi(k+N)r j/N} = e^{-2\pi k r j/N} \cdot e^{-2\pi r j} = e^{-2\pi k r j/N}$$

La Transformada de Fourier d'una sèrie x_r real és simètrica en el sentit que $X_{N-k} = X_k^*$ (* denota complex conjugat). L'expressió següent ho posa de manifest tenint en compte que es pren x real

$$x e^{-2\pi(N-k)r j/N} = x e^{-2\pi N r j/N} \cdot e^{-2\pi(-k)r j/N} = x e^{-2\pi(-k)r j/N} = x e^{2\pi k r j/N} = \left(x e^{-2\pi k r j/N} \right)^*$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) = \cos(-\varphi) - j\sin(-\varphi) = \left(e^{-j\varphi} \right)^*$$

Aquesta propietat posa de manifest que la Transformada Discreta de Fourier d'una sèrie real no subministra nova informació de contingut harmònic per a valors de k superiors a $N/2$. Dit d'una altra manera, una sèrie real no conté aquesta informació i es pot reconstruir utilitzant només sèries harmòniques per a valors de k no superiors a $N/2$. Aquest fet més endavant es relaciona amb el Teorema del mostratge o de Shannon. Evidentment, es podria associar el contingut harmònic a valors de k entre $N/2$ i N i fins i tot entre múltiples d'aquests valors atenent a la periodicitat citada de la TDF; ara bé no només s'evita aquesta interpretació sinó

que també s'evita el contingut freqüencial per sobre de $N/2$. (Recordeu els filtres antialiasadors).

Tenint en compte la propietat anterior i la periodicitat de la TDF, per a una sèrie real x_r , es verifica també la propietat $\mathbf{X}_{-k} = \mathbf{X}_{N-k} = \mathbf{X}_k^*$, útil quan cal parlar dels espectres a una cara.

La Transformada Discreta de Fourier converteix el producte de dues sèries en el **producte de convolució circular o cíclica** de les transformades de les dues sèries, representat per $*$ i definit a les expressions següents

$$\text{TDF}[x_r \cdot y_r] = \frac{1}{N} \mathbf{X}_k * \mathbf{Y}_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{X}_m \cdot \mathbf{Y}_{k-m} \quad \text{amb } \mathbf{Y}_{-s} = \mathbf{Y}_{N-s} \quad k = 0, \dots, N-1$$

També el producte de transformades és la transformada del producte de convolució circular de les funcions de partida

$$\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{Y}_k = \text{TDF}[x_r * y_r] = \text{TDF} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot y_{r-m} \right] \quad \text{amb } y_{-s} = y_{N-s} \quad r = 0, \dots, N-1$$

A l'operació descrita se l'anomena convolució circular per distingir-la del que seria la **convolució lineal** de dues sèries completades amb zeros fora de l'interval de definició fins a l'infinit, i que correspondria a l'aproximació numèrica de la convolució definida en apartats anteriors.

Sovint s'utilitzen els algorismes de càlcul de la Transformada Discreta de Fourier (l'usual s'anomena **FFT –Fast Fourier Transform–**) per calcular el producte de convolució de dos senyals seguint l'esquema següent

$$x_r * y_r = \text{TDF}^{-1} \left[\text{TDF}[x_r] \cdot \text{TDF}[y_r] \right]$$

Per utilitzar aquest procediment cal, evidentment, que els dos senyals siguin de la mateixa llargada i per evitar l'efecte de la correlació circular i obtenir la correlació lineal es dobla la llargada dels senyals afegint-hi zeros –fent un **coixí de zeros** o **zero padding** en la literatura anglesa– i es pren només la meitat del senyal resultant.

El Teorema de Parseval aplicat a la Transformada Discreta de Fourier diu

$$\sum_{r=0}^{N-1} |\mathbf{x}_r|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{X}_k|^2$$

$$\sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k^*$$

En l'estudi de vibracions, la sèrie \mathbf{x}_r és el registre d'un senyal digital de llargada finita i, per tant, els seus valors són reals de manera que a partir d'ara, en aquest text, es representarà com x_r . Així doncs, cal entendre aquesta sèrie x_r com un conjunt de N mostres d'un senyal separades pel període de mostratge Δt –invers de la freqüència de mostratge f_m –, i per tant la durada del senyal és $N \cdot \Delta t$. La Transformada Discreta de Fourier, entesa com aplicada a un senyal temporal, es pot rescriure per fer aparèixer el temps i la freqüència multiplicant i dividint l'exponent per Δt , reordenant i tenint en compte que $f_m = 1/\Delta t$

$$\mathbf{X}_k = \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{x}_r e^{-j2\pi k r \Delta t / (N \Delta t)} \rightarrow$$

$$\mathbf{X} \left(k \frac{f_m}{N} \right) = \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{x}(r \Delta t) e^{-j2\pi \left(k \frac{f_m}{N} \right) (r \Delta t)} \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\mathbf{x}_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}_k e^{j2\pi k r \Delta t / (N \Delta t)} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}(r \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X} \left(k \frac{f_m}{N} \right) e^{j2\pi \left(k \frac{f_m}{N} \right) (r \Delta t)} \quad r = 0, \dots, N-1$$
(31)

Atenent a les propietats esmentades, la TDF de x_r és simètrica en el sentit que $\mathbf{X}_{N-k} = \mathbf{X}_k^*$ i com s'ha vist no conté informació freqüencial per sobre de $k > N/2$. Segons les expressions 31 això equival a una freqüència $f_m/2$ que és igual al valor trobat amb la Transformada de Fourier en Temps Discret i que correspon al teorema del mostratge o de Shannon.

Comparant les expressions 19 i 31 es veu que la Transformada Discreta de Fourier Directa es pot prendre com una aproximació numèrica per al càlcul de la integral que cal fer per a l'obtenció dels coeficients de la Sèrie de Fourier d'una funció periòdica, considerant que la sèrie x_r correspon al mostratge d'un període de la funció. El període és doncs $T = N \cdot \Delta t$ i la freqüència fonamental, o del primer harmònic, $f_1 = 1/T = 1/(N \cdot \Delta t) = f_m/N$. Per obtenir els coeficients de la sèrie cal finalment multiplicar la TDF per $dt/T \approx \Delta t/T = 1/N$. La Transformada Discreta de Fourier Inversa reproduïx exactament, només cal multiplicar per N , la reconstrucció del senyal temporal, a partir dels coeficients de la sèrie, per als instants de temps $r \Delta t$. Cal remarcar, doncs, que si bé la TDF és una aproximació de la Sèrie de Fourier,

L'ús de la parella de transformades permet retrobar exactament els valors x_r , representatius de la funció de partida.

L'ús de la TDF per al càlcul de la Sèrie de Fourier requereix, evidentment, el coneixement previ del període, situació no usual si el senyal que s'analitza prové de mesures experimentals. Si no és que s'està treballant amb funcions analítiques i cal un resultat analític, tot i l'aproximació numèrica, és molt raonable pensar amb la TDF per al càlcul de la Sèrie encara que sigui utilitzant un interval de mostratge molt petit, compatible amb el temps de càlcul i els errors d'arrodoniment, per millorar l'aproximació numèrica que representa.

A partir del teorema de Parseval, es proposa una manera directa per obtenir una aproximació numèrica de l'espectre de potència mitjana en un període; es parteix de les expressions 32.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt &\approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{r=0}^{N-1} x^2(r\Delta t) \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r^2 = \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{X}_k|^2 \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

S'observa que el terme $|\mathbf{X}_k|^2/N^2$ és l'aportació a la potència total de l'harmònic k . En definitiva doncs, l'espectre de potència E_{Pk} és

$$E_{Pk} = \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 = \frac{1}{N^2} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (33)$$

La Sèrie de Fourier s'ha definit per a freqüències només positives o per a freqüències positives i negatives; el pas dels resultats de la TDF a la Sèrie de Fourier per a freqüències positives i negatives és immediat simplement tenint en compte la propietat ja mencionada que $\mathbf{X}_{-k} = \mathbf{X}_{N-k} = \mathbf{X}_k^*$. Aquesta consideració és, evidentment, vàlida també per a l'espectre de potència. Si es vol passar a parlar d'espectres a una cara caldrà tenir en compte la singularitat del primer terme, $k=0$, ja comentada anteriorment. En tot cas i en particular pel que fa a l'espectre de potència, cal tenir en compte que s'ha de preservar el valor de la potència total. Si N és parell, com és usual, aleshores el terme $N/2$ és també singular, és real ja que $\mathbf{X}_{N/2} = \mathbf{X}_{N/2}^*$, però no necessàriament nul i per tant cal donar-li el tractament adequat per preservar la potència total; en resum l'espectre a una cara E_{Pk}^G és

$$\begin{aligned}
E_{P0}^G &= \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_0|^2 \\
E_{Pk}^G &= \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 + \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_{(N-k)}|^2 = \frac{2}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 \quad k = 1, \dots, (N/2) - 1 \\
E_{P(N/2)}^G &= \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_{(N/2)}|^2
\end{aligned} \tag{34}$$

De la mateixa manera que s'ha analitzat la relació entre la Sèrie de Fourier i la TDF és interessant analitzar la relació entre aquesta i la Transformada de Fourier en temps discret. Comparant les expressions 21, 29 i 30 o 31 s'observa que si la sèrie x_r és finita la seva TDF coincideix amb la seva Transformada de Fourier en temps discret per a les freqüències múltiples de la freqüència $f_1 = f_m/N = 1/T$, essent f_m la freqüència de mostratge, N el nombre de mostres del senyal i T la durada d'aquesta.

La Transformada Discreta de Fourier Inversa és una aproximació numèrica de la integral de la Transformada de Fourier en temps discret inversa. En aquesta aproximació, la integral s'avalua per a les freqüències calculades amb la transformada directa i en ser aquestes múltiples de f_1 , el df queda substituït a la integral per aquesta freqüència. Cal notar que aquesta aproximació numèrica, que només utilitza el conjunt discret de les freqüències emprades en la transformació directa, reconstrueix estrictament el senyal de partida.

La relació entre la Transformada Contínua de Fourier i la Transformada Discreta de Fourier queda aparent si es comparen les expressions 23, 29 i 30 o 31. Si la sèrie x_r correspon al mostratge de tot el transitori en el qual es vol aplicar la Transformada de Fourier ambdues transformades discretes són una aproximació numèrica de les transformades contínues. La TDF directa multiplicada per Δt és l'aproximació numèrica de la TCF calculada per a les freqüències múltiples de $f_1 = f_m/N = 1/T$. La TDF^{-1} dividida per Δt és l'aproximació numèrica de la TCF^{-1} calculada per als instants de temps múltiples de Δt .

Si s'aplica la TDF només a un tram de la sèrie x_r , es produeix el fenomen de la dispersió ja explicat per a la TCF. La figura 1.32 correspon al mòdul $|\mathbf{X}_k|$ de la TDF d'1 s d'una velocitat harmònica de 12,5 Hz, $x(t) = \cos(2\pi 12,5t)$ mm/s, calculada amb una freqüència de mostratge de 100 Hz. Es pot veure la simetria que produeix el fet que $\mathbf{X}_{N-k} = \mathbf{X}_k^*$ i també la dispersió ocasionada per la limitació de la longitud del registre; els impulsos que corresponen a la TCF d'una funció harmònica es converteixen aquí en dos pulsos en forma de campana, centrats a les freqüències de 12,5 Hz i 87,5 Hz. Tenint en compte la periodicitat de la TDF el puls de 87,5 Hz es podria representar a -12,5 Hz. Finalment, s'observa també l'existència de contingut freqüencial més enllà de la freqüència de Nyquist, i per tant l'aparició d'una certa distorsió causada per l'efecte aliasador. Més endavant, es fa un estudi

més detallat de la forma i situació d'aquests pulsos en el qual es té en compte la forma en com es retalla del senyal total el tram de senyal escollit per fer la TDF.

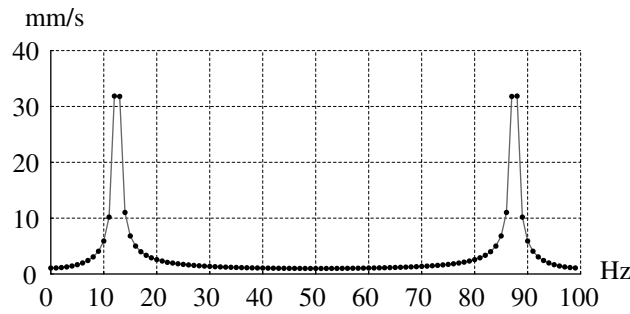


Figura 1.32. Transformada Discreta de Fourier d'1 s funció harmònica de 12,5 Hz.

A partir del teorema de Parseval, es pot obtenir una aproximació numèrica de la densitat espectral d'energia o de l'espectre d'energia d'un transitori definit per N mostres; es parteix de les expressions 35

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \approx \sum_{r=0}^{N-1} x^2(r\Delta t) \Delta t = \left(\sum_{r=0}^{N-1} x_r^2 \right) \Delta t = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{X}_k|^2 \Delta t \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta t}{N} |\mathbf{X}_k|^2 \right) \quad (35)$$

S'observa que el terme $|\mathbf{X}_k|^2 \Delta t / N$ es pot interpretar com l'aportació a l'energia total de la banda freqüencial k centrada a la freqüència $f_k = k f_1 = k/T$ i d'ample f_1 (que correspon a la separació entre freqüències centrals de bandes successives). En definitiva doncs, l'espectre d'energia E_{Ek} és

$$E_{Ek} = \frac{\Delta t}{N} |\mathbf{X}_k|^2 = \frac{\Delta t}{N} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (36)$$

Si es divideix l'espectre d'energia per l'ample de banda es té una aproximació de la densitat espectral d'energia S_{Ek} a l'entorn de la freqüència f_k

$$S_{Ek} = \frac{\Delta t}{N} |\mathbf{X}_k|^2 \cdot \frac{1}{f_1} = (\Delta t)^2 |\mathbf{X}_k|^2 = (\Delta t)^2 \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (37)$$

A partir d'aquí, es poden reproduir per als espectres d'energia i de densitat d'energia totes les consideracions fetes a la Sèrie de Fourier per als espectres de potència a doble cara i a una cara.

Per descriure el contingut freqüencial dels senyals aleatoris, s'ha proposat la densitat espectral de potència –DEP–, que es pot fer extensiva als senyals amb components harmònics amb la introducció d'impulsos de Dirac. Cal veure ara com se'n pot calcular una aproximació a partir de la TDF. A l'expressió 26 es defineix la DEP a partir de la potència mitjana del senyal calculada per a un temps que tendeix a infinit. Conceptualment, aquesta potència es pot calcular també com l'esperança matemàtica, la mitjana, d'un conjunt de potències mitjanes calculades en intervals de temps finits. En l'expressió següent E indica l'operador esperança matemàtica

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_P(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = E \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) dt \right\}$$

La potència mitjana en els intervals d'amplada T es pot calcular numèricament a partir de la TDF, i el teorema de Parseval, del senyal digitalitzat en aquest interval, si bé cal tenir la precaució d'evitar l'aliasatge amb els filtres adients i aleshores tenir present que el marge de freqüències queda reduït a $\pm f_m/2$.

$$E \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) dt \right\} \approx E \left\{ \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} x_r^2 \Delta t \right\} = E \left\{ \frac{\Delta t}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{X}_k|^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} E \left\{ \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 \right\}$$

De manera semblant a com s'ha fet en l'estudi de la TDF, s'observa que el terme $E \left\{ |\mathbf{X}_k|^2 / N^2 \right\}$ es pot interpretar com l'aportació a la potència total de la banda freqüencial k centrada a la freqüència $f_k = k f_1 = k/T$ i d'ample f_1 (que correspon a la separació entre freqüències centrals de bandes successives). En definitiva doncs, l'espectre de potència E_{Pk} és

$$E_{Pk} = E \left\{ \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 \right\} = E \left\{ \frac{1}{N^2} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \right\} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (38)$$

Si es divideix l'espectre de potència per l'ample de banda es té una aproximació de la densitat espectral de potència S_{Pk} a l'entorn de la freqüència f_k

$$S_{Pk} = E \left\{ \frac{1}{N^2} |\mathbf{X}_k|^2 \right\} \cdot \frac{1}{f_1} = E \left\{ \frac{\Delta t}{N} |\mathbf{X}_k|^2 \right\} = E \left\{ \frac{\Delta t}{N} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \right\} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (39)$$

L'estudi de la distribució estadística d'aquestes funcions conclou que amb n mesures el quocient entre la variància σ i la mitjana μ de $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*$ és aproximadament $\sigma/\mu = 1/\sqrt{n}$, fet

que posa de manifest la necessitat d'afegir un bon nombre d'estimacions per obtenir una bona estimació de la DEP d'un senyal aleatori..

La presència de components harmònics, o de component continu, en la DEP contínua es manifestava, tal com s'ha vist, amb impulsos de Dirac, que prenen valors finits en l'espectre de potència per bandes freqüencials. Amb la utilització de la TDF, aquesta presència es manifesta amb valors finits ja que tal com s'ha posat de manifest, és equivalent a fer els càlculs per bandes. Si bé per als càlculs relacionats amb la potència global els resultats obtinguts amb els procediments proposats en les expressions 38 i 39 són totalment vàlids, fins i tot amb la presència de components harmònics, resulta que cadascun d'aquests components no queda en general inclòs dins d'una banda única. Aquest fet no és més que la manifestació de la dispersió causada per la utilització de registres de llargada finita en el càlcul de la Transformada, contínua o discreta, de Fourier dels senyals harmònics.

1.5.5 Finestres temporals

En funció de la posició de la freqüència del component harmònic dins de la banda espectral que nominalment li correspon varia la dispersió i sobretot l'alçada del pic. Aquest fet és un inconvenient per poder assignar una amplitud al component harmònic, tot i poder negligir la presència de senyal aleatori a l'entorn del pic. Per millorar aquesta situació, es recorre a la utilització de **finestres temporals** que són funcions temporals no nul·les només en un interval de temps, de manera que per producte amb el senyal que s'analitza –teòricament de durada infinita– permet obtenir els registres de llargada finita necessaris per fer la TDF. El procediment emprat fins ara, consistent en prendre directament els valors necessaris del senyal, és equivalent a utilitzar una finestra bàsica de forma rectangular –**Finestra rectangular**. La forma adequada de les finestres permet focalitzar els pics de l'espectre del senyal sobre el que s'aplica. Existeixen un nombre important de finestres –Hanning, Kaiser-Bessel, Flat-Top...– que s'utilitzen segons convingui; la més usada és la Hanning.

Per a l'anàlisi de l'efecte de les finestres aplicades a una funció harmònica cal tenir present que el producte de la funció per la finestra en el domini temporal es converteix en el producte de convolució de les Transformades de Fourier en el domini freqüencial. La Transformada de Fourier de la funció harmònica és una parella d'impulsos de Dirac i la convolució d'una funció per un impuls és la mateixa funció simetritzada respecte a l'eix de les ordenades i desplaçada fins a fer coincidir l'origen d'abscisses amb la posició de l'impuls tal com es mostra a la figura 1.33.

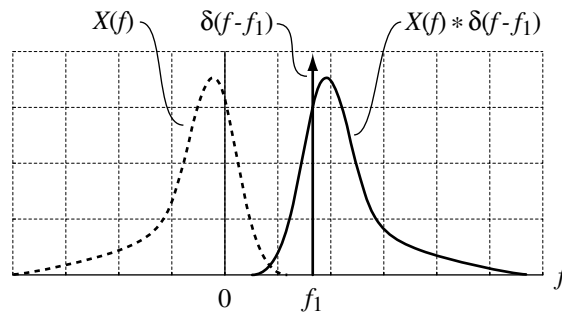


Figura 1.33. Producte de convolució d'una funció per un impuls.

A la figura 1.34 superior es mostra el mòdul de la Transformada de Fourier d'una finestra rectangular de durada 1 s; s'observa que s'anul·la cada 1 Hz, fet que és general: la TF d'una funció rectangular de durada T s s'anul·la a les freqüències múltiples de $1/T$ Hz. A la figura 1.34 inferior esquerra es pot veure en traç gris la TF de la funció harmònica de freqüència 10 Hz – $x(t) = \cos(2\pi 10t)$ – multiplicada per la finestra rectangular. Del senyal resultant del producte, de durada $T = 1$ s, se'n fa la TDF (i es multiplica pel període de mostratge Δt perquè correspongui al càlcul numèric de la TF) que té una resolució freqüencial $\Delta f = 1/T = 1$ Hz i que coincideix amb la TF per als múltiples d'aquesta resolució. En aquest cas queda un únic valor de la TDF no nul –una única ratlla espectral no nul·la– que coincideix amb la meitat de l'amplitud de la funció harmònica (cal recordar que la TF d'una funció harmònica són dos impulsos). A la figura 1.34 inferior dreta es presenta el mateix procediment però per a una funció harmònica de 9,5 Hz. Ara la TF de la finestra queda situada de manera que la TDF en lloc d'un valor no nul presenta una sèrie de valors no nuls, i el més proper a la freqüència de la funció harmònica, 9,5 Hz, és força inferior a la meitat de l'amplitud de la funció. Aquest fet és la concreció al cas estudiat del fenomen de la dispersió. La situació d'una funció harmònica arbitrària es trobarà entre els dos extrems presentats.

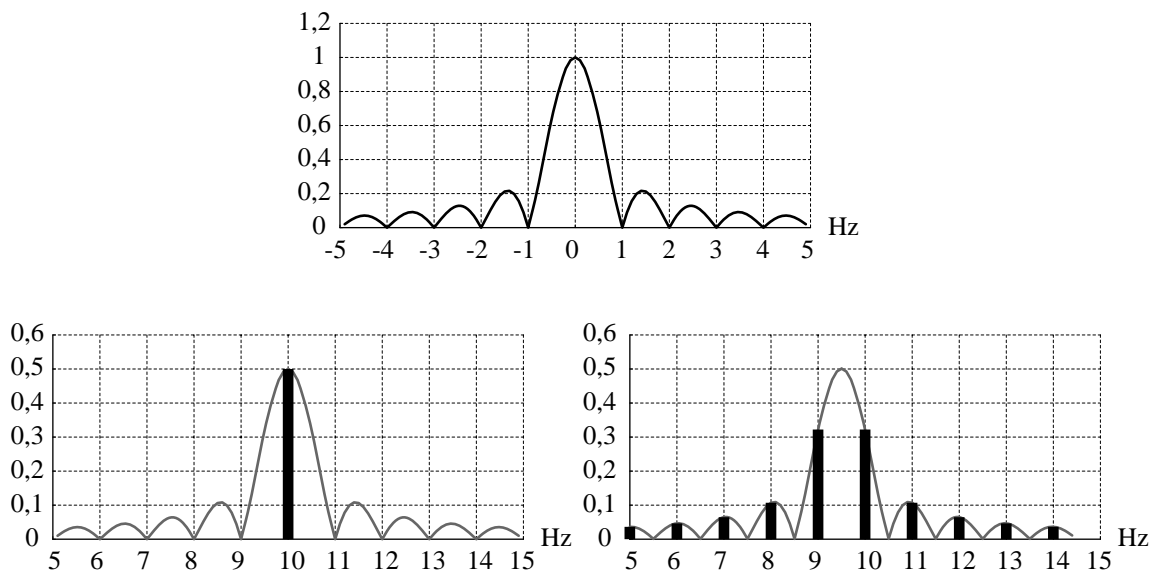


Figura 1.34. Dispersió causada per la finestra rectangular.

La situació presentada a la figura 1.34 té conseqüències negatives en l'anàlisi de senyals, per una banda la lectura directa dels màxims de la TDF no corresponen a les amplituds dels components harmònics i, el que és pitjor, aquests màxims depenen de la freqüència. Per altra banda, la dispersió de l'espectre fa que els pics associats a components harmònics de freqüències properes es barregin. Per disminuir aquestes conseqüències s'utilitzen les finestres temporals ja comentades.

A la figura 1.35 superior esquerra es mostra l'anomenada finestra Hanning d'amplada temporal $T=1$ s, definida per la funció $w_{\text{Hanning}}(t) = (1 - \cos(2\pi t/T))$. A la figura 1.35 superior dreta es pot veure la TF d'aquesta finestra. Els dos gràfics de la part inferior de la figura 1.35 presenten els resultats de fer els mateixos procediments descrits per a la figura 1.34 però ara utilitzant la finestra Hanning. S'observa que si la freqüència de la funció harmònica coincideix amb un múltiple de $1/T$ el valor de la TDF a aquesta freqüència continua essent la meitat de l'amplitud de la funció harmònica. Ara bé, si la freqüència del component harmònic es situa centrada entre dos múltiples de $1/T$ els màxims de la TDF s'acosten molt més a la meitat de l'amplitud del que ho feien per a la finestra rectangular. Per altra banda, en comparar es veu també una disminució acusada de la dispersió.

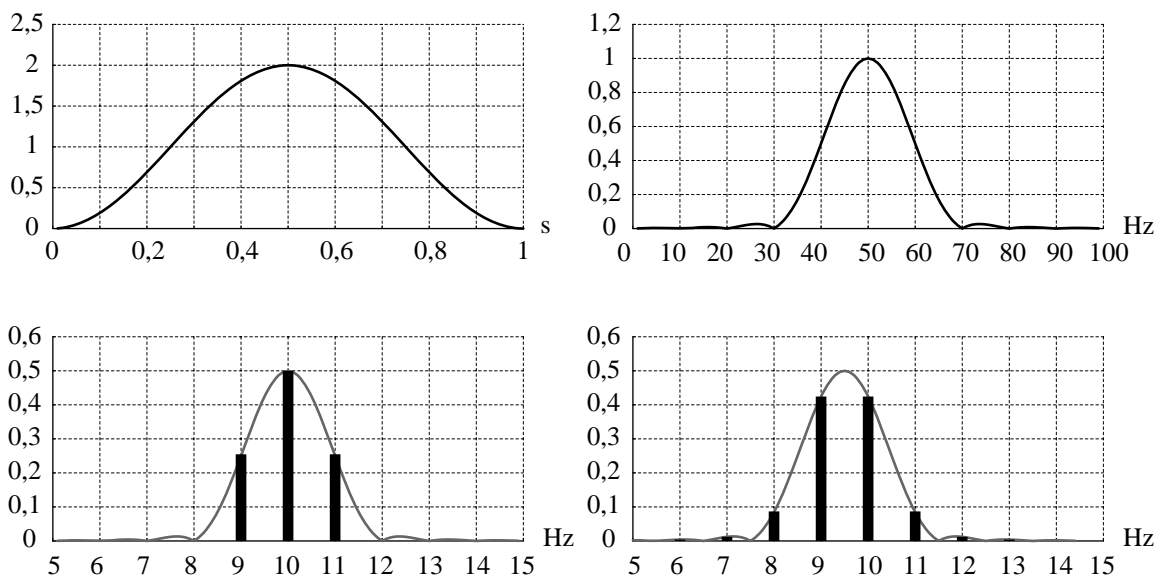


Figura 1.35. Finestra Hanning i dispersió que causa a l'espectre.

El guany causat per la utilització de la finestra Hanning queda clar en l'estudi de l'espectre de senyals amb components harmònics; altres finestres actuen de manera semblant i cal valorar la seva bondat en aplicacions concretes.

Ara bé, cal tenir present que aquesta finestra i les altres emprades usualment no mantenen l'energia del senyal. Això vol dir que la potència mitjana, o l'energia segons convingui, calculada a partir del senyal multiplicat per la finestra no coincideix amb la del senyal

original, fet que cal tenir en compte en valorar la potència, o l'energia, a partir de l'espectre. Per quantificar la diferència, s'utilitza un senyal anomenat **soroll blanc** –senyal aleatori de DEP constant– i es calcula la relació entre l'energia del soroll blanc multiplicat per la finestra i l'energia del soroll blanc en el temps que dura la finestra (de fet l'energia del soroll multiplicat per la finestra rectangular de la mateixa durada). Per a la finestra Hanning la relació és 1,5. Una altra manera d'expressar aquest resultat és amb l'**ample de banda equivalent** de la finestra. Pel que fa a la determinació de l'espectre de potència d'un soroll blanc, aplicar la finestra Hanning és equivalent a suposar que l'ample de banda dels filtres és $1,5 \Delta f$ en lloc del $\Delta f = 1/T$ quan s'utilitza la finestra rectangular.

1.5.6 Espectres a partir de la Transformada Discreta de Fourier

En tots els espectres calculats a partir de la TDF, apareix el producte de Transformades de Fourier $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*$ i en particular $E\{\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*\}$ quan cal amitjanar sobre un conjunt de mesures, fet sovint necessari i si més no desitjable. S'anomena **autoespectre** G_{xxk} d'un senyal a l'espectre a una cara definit com

$$\begin{aligned} G_{xx0} &= \frac{1}{N^2} E\{\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{X}_0^*\} = \frac{1}{N^2} E\{|\mathbf{X}_0|^2\} \\ G_{xxk} &= \frac{2}{N^2} E\{\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*\} = \frac{1}{N^2} E\{|\mathbf{X}_k|^2\} \quad k = 1, \dots, (N/2) - 1 \\ G_{xxN/2} &= \frac{1}{N^2} E\{\mathbf{X}_{N/2} \cdot \mathbf{X}_{N/2}^*\} = \frac{1}{N^2} E\{|\mathbf{X}_{N/2}|^2\} \quad \text{amb } N \text{ parell} \end{aligned} \quad (40)$$

En aquesta definició, s'inclou el factor $1/N^2$ per obtenir els valors presentats pels analitzadors d'espectres –instruments físics o virtuals previstos específicament per a l'anàlisi espectral de senyals– i és equivalent a incorporar el factor $1/N$ a la TDF directa en lloc de fer-ho a la inversa com es fa a la definició de les expressions 29 i 30. Presenta l'avantatge de no variar l'alçada de l'autoespectre en funció del nombre de mostres preses per fer la TDF. A causa de la interpretació física directa buscada en els analitzadors d'espectres, és normal que presentin els espectres a una cara, només per a freqüències positives. Comparant les expressions 40 amb 33 i 38 es veu que de fet l'autoespectre és l'espectre d'energia a una cara dels senyals periòdics i dels senyals aleatoris, amb contingut o no de components harmònics.

En l'anàlisi de senyals, també s'utilitza l'**espectre encreuat** de dos senyals definit de la mateixa manera que l'autoespectre però a partir de la TFD de dos senyals i de l'amitjanament $E\{\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{Y}_k^*\}$.

Tant si s'utilitza un analitzador d'espectres com la TDF, en un determinat càlcul la interpretació del resultat depèn del tipus de senyal que s'analitza –transitori, periòdic, ... – i de quina magnitud se'n vol obtenir; ni una cosa ni altra són conegudes a priori per l'analitzador o per l'algorisme de càlcul i, per tant, queda a càrrec de l'usuari la interpretació final i les unitats de l'espectre obtingut. A la taula següent es presenta un resum dels resultats mostrats anteriorment i les unitats corresponents, anomenant U a la unitat de la magnitud de partida –mm/s, N, Pa, etc. Només es presenten els espectres a doble cara ja que és immediat passar als espectres a una cara, només per a freqüències positives, seguint el procediment indicat a les expressions 34.

Senyal transitori

Transformada Discreta de Fourier	\mathbf{X}_k [U]
Transformada de Fourier	$\mathbf{X}_k \Delta t$ [U·s] o [U/Hz]
Espectre d'energia	$E_{Ek} = \frac{\Delta t}{N} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*$ [U ² ·s]
Densitat espectral d'energia	$S_{Ek} = (\Delta t)^2 \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^*$ [(U ² ·s)/Hz]

Senyal no transitori (components aleatori i harmònics)

Espectre de potència	$E_{Pk} = E \left\{ \frac{1}{N^2} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \right\}$ [U ²]
Espectre de valor eficaç	$E_{RMSk} = \sqrt{E_{Pk}}$ [U]
Densitat espectral de potència	$S_{Pk} = E \left\{ \frac{\Delta t}{N} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k^* \right\}$ [U ² /Hz]

L'any 1965 J.W. Cooley i J.W. Tukey van publicar l'algorisme de la **Transformada Ràpida de Fourier –FFT–** per al càlcul numèric de la Transformada Discreta de Fourier. Aquest algorisme redueix el nombre d'operacions respecte al càlcul directe de les expressions que la defineixen. Així, si N és una potència entera de 2 el nombre d'operacions passa de ser proporcional a N^2 a ser proporcional a $N \log_2 N$. Per exemple, si $N = 2^{10}$ la relació en el nombre d'operacions és $N / \log_2 N = 102,4$.

Aquest algorisme va suposar una revolució en l'estudi, sobretot experimental, de les vibracions i en l'anàlisi de senyals. És l'algorisme més utilitzat en el processat digital de senyals –DSP– i gràcies a ell (i a l'augment de les potències de càlcul dels processadors) s'ha avançat i assolit un alt nivell en tècniques que requereixen l'anàlisi de vibracions com és per exemple el manteniment preventiu-predictiu de màquines i instal·lacions.

1.6 Escales de freqüència

Per representar les freqüències, de la mateixa manera que per representar altres magnituds, és usual emprar escales lineals i logarítmiques. Amb l'ús d'una escala logarítmica es poden representar a la mateixa escala i amb la mateixa precisió relativa, valors molt grans i molt petits de la freqüència. En l'àmbit de les vibracions es solen utilitzar les escales logarítmiques en base 10 i en base 2.

La utilització de l'escala logarítmica en base 10 porta a la definició de la **dècada**: un increment de freqüència d'una dècada és equivalent a multiplicar per 10 la freqüència de partida i un interval, o una banda, freqüencial d'una dècada està limitat per una freqüència superior igual a 10 vegades la freqüència inferior. Sovint, en realitzar anàlisis freqüencials cal emprar intervals o bandes freqüencials més estrets; en aquest cas és usual emprar bandes de dècims de dècada en les quals la freqüència superior és $10^{1/10}$ vegades la freqüència inferior.

El nombre n de dècades i m de dècims de dècada que hi ha en un interval de la freqüència f_i a la freqüència f_s són:

$$\frac{f_s}{f_i} = 10^n \quad \rightarrow \quad n = \lg \frac{f_s}{f_i}; \quad \frac{f_s}{f_i} = 10^{m/10} \quad \rightarrow \quad m = 10 \lg \frac{f_s}{f_i}$$

En escala logarítmica, la freqüència central f_c d'una banda freqüencial, és la mitjana geomètrica dels seus extrems; així si f_i és la freqüència inferior i f_s és la freqüència superior de banda, la freqüència central és $f_c = \sqrt{f_i f_s}$. En definitiva doncs:

Per a una dècada: $f_s = f_i \cdot 10$ i $f_c = f_i \cdot 10^{1/2}$

Per a un dècim de dècada: $f_s = f_i \cdot 10^{1/10}$ i $f_c = f_i \cdot 10^{1/20}$

La norma ISO 266 defineix les freqüències centrals de les bandes de dècim de dècada segons l'expressió $f_{cn} = 10^{n/10}$ de manera que la banda n queda definida per:

$$f_{in} = 10^{(n-0,5)/10}; \quad f_{cn} = 10^{n/10}; \quad f_{sn} = 10^{(n+0,5)/10}$$

Tradicionalment, i en particular en l'àmbit de l'acústica, també s'usa l'escala logarítmica en base 2 que porta a la definició de l'**octava**: un increment de freqüència d'una octava implica multiplicar la freqüència de partida per 2. Si cal utilitzar bandes freqüencials més estretes en aquest cas s'empren les bandes de terços d'octava en les quals la freqüència superior és $2^{1/3}$ la freqüència inferior.

El nom d'octava fa referència a l'entorn musical; en concret, a les vuit notes que constitueixen l'escala musical. La darrera nota de l'escala, l'octava, és de freqüència doble a la de la primera.

El nombre n d'octaves i m de terços d'octava que hi ha en un interval que va de la freqüència f_i a la freqüència f_s són:

$$\frac{f_s}{f_i} = 2^n \quad \rightarrow \quad n = \log_2 \frac{f_s}{f_i} \quad \frac{f_s}{f_i} = 2^{m/3} \quad \rightarrow \quad m = 3 \log_2 \frac{f_s}{f_i}$$

Les relacions entre les freqüències inferior i superior, i la freqüència central, de cada octava i de cada terç d'octava s'estableixen de manera anàloga al cas de les dècades:

Per a una octava: $f_s = f_i \cdot 2$ i $f_c = f_i \cdot 2^{0,5}$

Per a un terç d'octava : $f_s = f_i \cdot 2^{1/3}$ i $f_c = f_i \cdot 2^{1/6}$

La norma ISO 266 defineix les freqüències centrals de les bandes d'octava i de terç d'octava. La freqüència de partida és 1000 Hz i s'arrodoneix per tal que 1 Hz sigui també una freqüència central, d'aquesta manera les freqüències centrals, arrodonides a la unitat, per a bandes d'octava entre 1 Hz i 1000 Hz són, en Hz: 1, 2, 4, 8, 16, 31,5, 63, 125, 250, 500, 1000.

Un dècim de dècada ($10^{1/10} = 1,2589$) és aproximadament igual a un terç d'octava ($2^{1/3} = 1,2599$); com es pot observar la diferència és inferior al 0,1%, la qual cosa fa pràcticament equivalents aquests dos intervals.

A la figura 1.36 es mostra el senyal temporal de la vibració vertical produïda en el terra per una voladura per a la construcció d'un túnel i el seu espectre d'energia. En el gràfic de la part superior dreta l'escala de la freqüència és lineal i l'ample de les bandes freqüencials és d'1 Hz. En els gràfics de la part inferior de la figura, l'escala de la freqüència és logarítmica i

l'ample de banda és de dècim de dècada en el gràfic de l'esquerra i d'octava en el gràfic de la dreta. En tots els espectres, l'energia s'expressa en dB referits a 10^{-12} (mm/s)²·s.

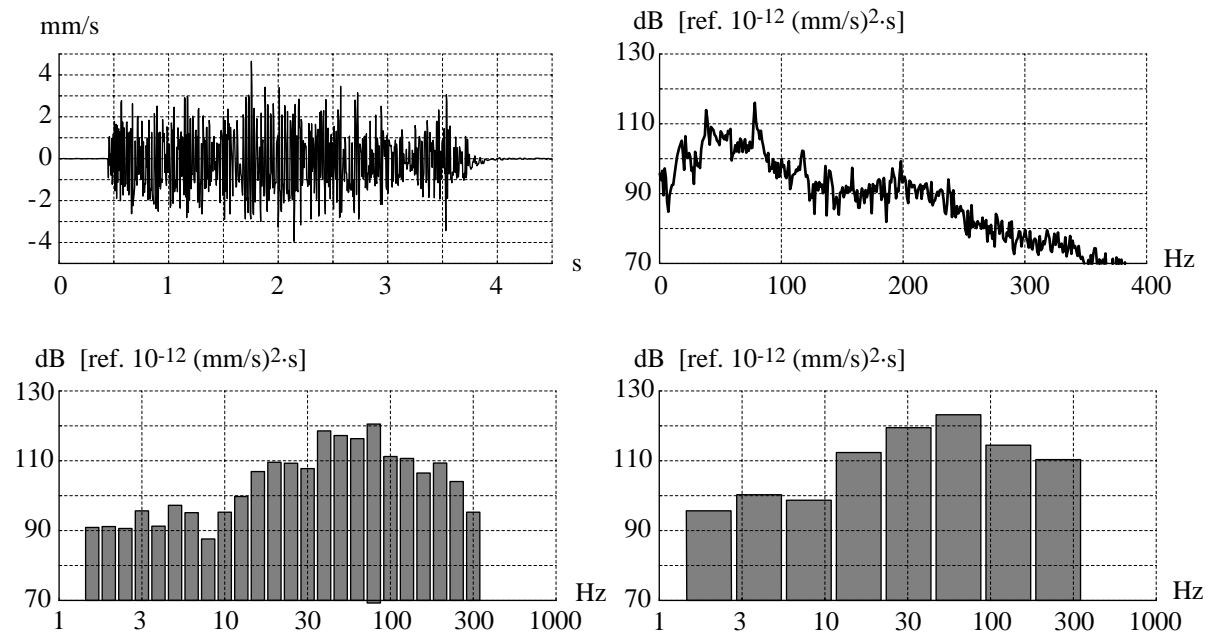


Figura 1.36. Vibració ocasionada per una voladura. Espectre d'energia en bandes d'1 Hz, de dècim de dècada i d'octava.

1.7 Bibliografia

Newland, D. E. (1984). *An introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*. England: Longman.

Rao, S. S. (1995). *Mechanical Vibrations*. USA: Addison-Wesley Company.

Thompson, W. T. (1981). *Teoria de vibraciones. Aplicaciones*. Mexico: Prentice-Hall.

Normes ISO i IEC