



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

Determinació del valor eficaç

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

2010



Departament d'Enginyeria Mecànica

Vibracions Mecàniques.

Determinació del valor eficaç

Primera edició Setembre 2010

© Els autors, 2010

Edita: Salvador Cardona i Foix

I.S.B.N.: 978-84-693-5794-1

Dipòsit Legal: B-38346-2010

Són rigurosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Índex

Introducció	5
1 Algorismes per al càlcul del valor eficaç	7
1.1 Ponderació exponencial	7
1.2 Ponderació constant	8
2 Resposta dels algorismes a un pols de curta durada	10
3 Valor eficaç mòbil d'un senyal harmònic	11
4 Valor eficaç mòbil de diversos senyals experimentals	12
5 Bibliografia	17



Introducció

Per a quantificar, mitjançant un valor únic, el nivell de vibració –desplaçament, velocitat, acceleració– o de magnituds associades a aquesta –força, pressió...– a partir de la seva evolució en el temps es defineix un conjunt de valors o nivells globals determinats a partir d'un interval de temps T d'observació de la vibració, que teòricament en alguns casos hauria de ser infinit. El més emprat d'aquests nivells és el valor eficaç o valor rms (*root mean square*).

Pot ser interessant recordar d'on prové el concepte i denominació de valor eficaç. Inicialment, el valor eficaç d'un corrent altern era la tensió del corrent continu que produïa la mateixa dissipació tèrmica sobre una resistència d'un ohm.

El **valor eficaç** és l'arrel quadrada de la mitjana, durant l'interval de temps T , dels quadrats dels successius valors de la vibració, expressió 1. Aquesta mitjana s'anomena valor quadràtic mitjà de la vibració i, per tant, el valor eficaç es defineix també com l'arrel quadrada del valor quadràtic mitjà.

$$x_{\text{eficaç}} = x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad [1]$$

Sovint, més que el valor eficaç calculat en un interval temporal molt gran (teòricament infinit), proporciona una millor informació del senyal determinar, en cada instant, una aproximació del valor eficaç obtinguda només amb la informació precedent. Això dona lloc a una funció del temps que és el **valor eficaç mòbil** (*running rms*). Es pot calcular amb un interval T de llargada constant de la informació precedent donant el mateix pes a tota la informació, expressió 2, o utilitzant tota la història precedent, però donant més pes a la informació més recent, expressió 3. Això dona lloc a la ponderació exponencial caracteritzada per la seva constant de temps τ .

$$x_{\text{eficaç}}(t) = x_{\text{rms}}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t x^2(t) dt} \quad [2]$$

$$x_{\text{eficaç}}(t) = x_{\text{rms}}(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^t x^2(t') e^{(t'-t)/\tau} dt'} \quad [3]$$



En alguna bibliografia, com a la norma ISO 2631, es presenta el valor eficaç amb ponderació exponencial com una aproximació de l'altre. Es considera que aquesta visió no és encertada, ja que els dos valors tenen concepcions, utilitats i procediments de càlcul diferents. De fet, en la mateixa norma es demana que s'utilitzi la ponderació exponencial amb una constant de temps τ d'un segon (corresponent a la constant *slow* en la mesura del nivell de so amb sonòmetres) per al càlcul del nivell de vibració L_{aw} , emprat en la valoració de l'efecte de les vibracions sobre les persones en edificis. El nivell L_{aw} és el màxim del valor eficaç –MTVV (Maximum Transient Vibration Value)– de l'acceleració de vibració ponderada amb un filtre normalitzat.

En aquesta mateixa norma, se cita que la diferència de resultats entre els valors eficaços obtinguts pels dos procediments és molt petita per a xocs de curta durada comparada amb τ , i una mica més gran (fins a un 30%) quan s'aplica a xocs i transitoris de durada més gran.

La ponderació exponencial és la que s'obté de forma natural quan la integració per a obtenir el valor eficaç es realitza amb un filtre integrador de freqüència de tall $f_t = 1/(2\pi\tau)$, sistema de primer ordre de resposta freqüencial $\mathbf{H}(\omega) = 1/(1 + \tau\omega j)$. En la manipulació de senyals analògics, aquest filtre correspon a un circuit elèctric RC –resistència-condensador– i es pot implementar fàcilment amb un amplificador operacional. No cal dir que, amb aquesta ponderació, el valor eficaç calculat s'ajusta al seu concepte físic descrit anteriorment.

La ponderació constant correspon a una integració feta amb un filtre integrador de resposta impulsional finita –FIR, finite impulse response–, no realitzable amb un circuit analògic.

A la figura 1, es mostra el valor eficaç d'un pols unitari calculat amb ponderació exponencial i constant. S'ha pres $T = \tau = 0,1$ s, els càlculs s'han realitzat amb una freqüència de mostratge $f_m = 2000$ Hz i la durada del pols és d'una mostra.



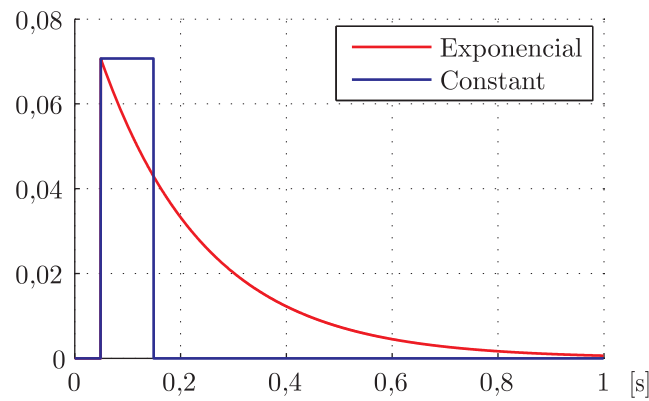


Fig.1 Valor eficaç d'un pols unitari calculat amb ponderació exponencial i constant.

1 Algorismes per al càlcul del valor eficaç

Per als dos tipus de ponderació es poden utilitzar funcions específiques o funcions genèriques del filtratge digital (per exemple *filter* de Matlab).

1.1 Ponderació exponencial

Es presenta, en primer lloc, un algorisme recurrent per al càlcul de la ponderació exponencial, aplicable a qualsevol tipus de senyal.

$$y(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t z(t') e^{(t'-t)/\tau} dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^{t-\Delta t} z(t') e^{(t'-t)/\tau} dt' + \frac{1}{\tau} \int_{t-\Delta t}^t z(t') e^{(t'-t)/\tau} dt'$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^{t-\Delta t} z(t') e^{(t'-t)/\tau} dt' &= \frac{1}{\tau} \int_0^{t-\Delta t} z(t') e^{(t'-(t-\Delta t)+\Delta t)/\tau} dt' \\ &= e^{\Delta t/\tau} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{t-\Delta t} z(t') e^{(t'-(t-\Delta t))/\tau} dt' \right) = e^{\Delta t/\tau} y(t - \Delta t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\Delta t}^t z(t') e^{(t'-t)/\tau} dt' \approx \left(\frac{1}{\tau} \int_{t-\Delta t}^t e^{(t'-t)/\tau} dt' \right) z(t) = \left(1 - e^{-\Delta t/\tau} \right) z(t)$$

$$y(t) \approx e^{\Delta t/\tau} y(t - \Delta t) + \left(1 - e^{-\Delta t/\tau} \right) z(t)$$

En resum doncs, per a un senyal mostrejat amb una freqüència de mostratge $f_m = 1/\Delta t$ i $t = n \Delta t$ es té:



$$y(n) \approx e^{\Delta t/\tau} y(n-1) + \left(1 - e^{\Delta t/\tau}\right) z(n)$$

En particular, per al càlcul del valor eficaç:

$$x_{\text{eficaç}}^2(n) \approx e^{\Delta t/\tau} x_{\text{eficaç}}^2(n-1) + \left(1 - e^{\Delta t/\tau}\right) x^2(n)$$

Tal com s'ha comentat, la ponderació exponencial equival a passar el quadrat del senyal per un filtre integrador la resposta impulsional del qual tendeix asimptòticament a zero –Infinite Impulse Response, IIR. De la resposta freqüencial del filtre analògic $H(\omega)$ es passa a la resposta $H(z)$ del filtre digital equivalent, mitjançant la transformació bilineal (procediment estàndard), i de $H(z)$ s'obtenen de manera immediata els coeficients de l'algorisme recurrent que permet determinar la sortida del filtre en funció de l'entrada. En Matlab la transformació bilineal es fa amb la funció *bilinear* i l'algorisme recurrent amb la funció *filter*.

La diferència entre utilitzar l'algorisme recurrent proposat i el filtre digital és pràcticament nul·la i es pot valorar en un decalatge temporal de $\Delta t/2$.

1.2 Ponderació constant

Per a la ponderació constant es pot implementar un algorisme que simplement reproduïxi la definició: amitjanar el nombre de valors (x^2) que hi ha en el temps d'integració T . L'algorisme es pot modificar de manera que en cada Δt en el total acumulat només se sumi el nou valor a tenir en compte i es resti el més antic. Aquesta ponderació també equival, tal com s'ha dit, a passar el quadrat del senyal per un filtre de resposta impulsional finita –Finite Impulse Response FIR– els coeficients del quals són immediats de definir.

Els resultats amb els tres procediments de càlcul són, òbviament, els mateixos si es pren la precaució d'indexar correctament tots els vectors.

Submostratge

En procedir el valor eficaç mòbil d'una integració és clar que la seva evolució temporal és molt més lenta que la del senyal de partida; és per això que sovint no cal em-



magatzemar-lo a la mateixa freqüència de mostratge que aquell, fet que facilita la seva manipulació i representació, sobretot en senyals de llarga durada, com els procedents d'estudis d'impacte ambiental en situacions no estacionàries que, per tant, requereixen llargs registres temporals per a ser significatius. Els algorismes basats directament en l'aplicació de filtres poden ser menys eficients en aquest cas ja que requereixen, en principi, fer els càlculs per a tots els punts, guardar tots els resultats i posteriorment prendre'n un de cada n .

Temps de càlcul

Per tal de comparar l'eficiència quant al temps de càlcul necessari per a les dues ponderacions amb els diferents algorismes comentats, s'ha determinat el valor eficaç d'un mateix senyal, el mateix nombre de vegades i amb les mateixes condicions (programari –Matlab– i ordinador). Cal tenir en compte que la funció *filter* és una funció interna de Matlab i per tant molt eficient.

Els procediments són:

- Rms1: Ponderació exponencial. Implementació de l'algorisme recurrent descrit.
- Rms2: Ponderació exponencial. Utilització de la funció *filter*.
- Rms3: Ponderació constant. Implementació de l'algorisme d'omitjanament.
- Rms4: Ponderació constant. Implementació de l'algorisme d'omitjanament renovant valor.
- Rms5: Ponderació constant. Utilització de la funció *filter*.

El senyal temporal emprat és un vector de 200000 punts. En una primera aplicació –1/1– es manté la freqüència de mostratge, és a dir es genera un vector de valors eficaços de la mateixa llargada que el vector de partida. En una segona aplicació –1/200– el valor eficaç es guarda cada 200 valors temporals, que correspon a una situació prou normal en una anàlisi de vibracions: freqüència de mostratge del senyal $f_m = 2000$ Hz, $T = \tau = 1$ s i freqüència de mostratge del valor eficaç de 10 Hz. Una i altra aplicació s'han repetit 15 vegades i s'han omitjanant els resultats.

A la taula 1, es mostren els temps obtinguts i queda de manifest l'ordre de l'eficàcia quant al temps de càlcul dels procediments.



Taula 1. Temps de càlcul en ms.

	1/1	1/200
Rms1	12,5	1,1
Rms2	21,9	23,7
Rms3	7264,6	37,5
Rms4	5385,5	44,9
Rms5	909,2	906,3

2 Resposta dels algorismes a un pols de curta durada

És interessant analitzar la diferència de resultats entre les dues ponderacions i comprovar les afirmacions de la norma ISO 2631 comentades anteriorment. És per això que es calcula el màxim del valor eficaç –MTVV (Maximum Transient Vibration Value)– d’un pols unitari en funció de la seva durada t_p comparada amb el temps d’integració T o la constant de temps τ . Es pren $T = \tau$. A la figura 2, es mostra el resultat en dB referits a la unitat (valor eficaç si el pols és de durada prou llarga). S’observa, òbviament, que amb la ponderació constant quan la durada del pols arriba a τ el màxim del valor eficaç mòbil ja no creix més i es manté constant.

La diferència màxima entre les dues ponderacions es produeix quan $t_p = \tau$ i es té $\text{MTVV}_{\text{pols}_{\text{cont.}}}/\text{MTVV}_{\text{pols}_{\text{exp.}}} = 1,258$, que equival a 2 dB. Aquest resultat confirma el comentari de la norma ISO 2631 pel que fa a aquesta diferència.

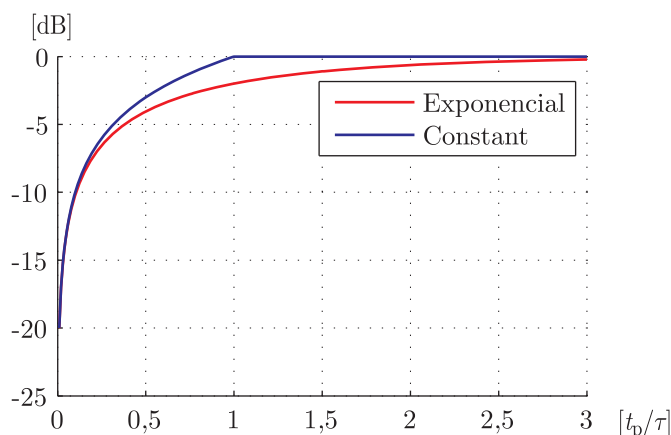


Fig. 2 Màxim del valor eficaç calculat per a un pols unitari en funció de la relació entre la seva durada t_p i la constant de temps τ .



A la figura 3, es mostra un pols de durada 0,5 s i l'evolució temporal del valor eficaç mòbil amb les dues ponderacions i $T = \tau = 1$ s.

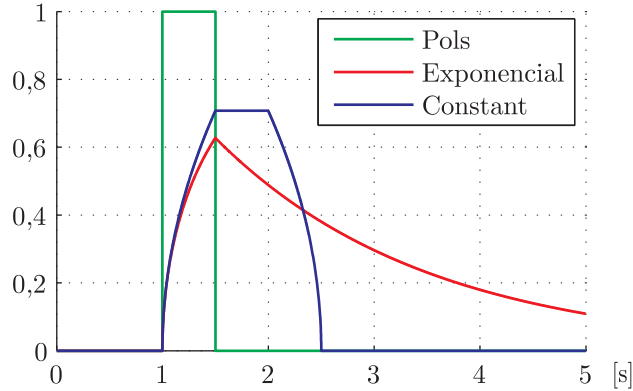


Fig.3 Senyal tipus pols i evolució temporal del valor eficaç mòbil calculat amb les dues ponderacions.

3 Valor eficaç mòbil d'un senyal harmònic

És interessant estudiar l'arriament del valor eficaç mòbil d'un senyal harmònic, per tant estacionari, ja que així es té una idea d'aquest arriament en funció de la constant de temps utilitzada i del contingut en components de baixa freqüència dels senyals. S'estudia només el cas de ponderació exponencial perquè té un tractament prou senzill en el camp analògic.

Se suposa que el senyal és $x(t) = \cos(\omega t)$; el seu quadrat és:

$$x^2(t) = (\cos(\omega t))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$$

Aquest quadrat té un component continu i un component harmònic. En passar pel filtre integrador, $x_f^2(t)$, el component continu té guany unitari, $\mathbf{H}(0) = 1$, i el guany del component harmònic és $|\mathbf{H}(2\omega)|$ de manera que:

$$x_f^2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + |\mathbf{H}(2\omega)| \cos(2\omega t + \arg[\mathbf{H}(2\omega)]) \right) \text{ amb}$$

$$|\mathbf{H}(2\omega)| = 1 / \sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}$$

Tenint en compte que $\left| \mathbf{H}(2\omega) \right|$ decreix ràpidament amb la freqüència i recordant que si ε és petit $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$, es té:

$$\sqrt{x_f^2(t)} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \cos(2\omega t + \arg[\mathbf{H}(2\omega)]) \right)$$

Així doncs, l'amplitud pic a pic de l'arissament, relativa al verdader valor eficaç, és aproximadament

$$x_{\text{arissament pic a pic}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4\pi f\tau)^2}} \quad [4]$$

A la taula 2, es mostra l'amplitud de l'arissament en funció de $f\tau$ calculada amb l'expressió anterior i determinada a partir del gràfic del valor eficaç d'un senyal harmònic de valor eficaç unitari. També es mostra la diferència entre ambdues en dB.

Taula 2. Amplitud de l'arissament del valor eficaç mòbil d'un senyal harmònic.

$f\tau$	x aris. pic a pic	Exp. 4	dB
0,1	0,6594	0,6227	0,50
0,2	0,3765	0,3697	0,16
0,5	0,1575	0,1572	0,017
1	0,0793	0,0793	--

4 Valor eficaç mòbil de diversos senyals experimentals

Per tal de comparar els resultats obtinguts en aplicar les dues ponderacions en senyals reals, s'ha determinat el valor eficaç mòbil d'un conjunt d'aquests amb dues constants de temps $\tau = 1$ s i $\tau = 0,1$ s; la primera és usual en l'estudi de vibracions i la segona es pot utilitzar si es vol que el valor eficaç segueixi algun fenomen relativament ràpid, per exemple el pas dels bogis en l'estudi de les vibracions causades pel pas de trens. S'han estudiat els següents senyals:



- Senyal1: Sisme. Observatori Fabra. Vibració direcció Est
- Senyal2: Sisme. Observatori Fabra. Vibració direcció Nord
- Senyal3: Sisme. Observatori Fabra. Vibració direcció Vertical
- Senyal4: Sisme. Observatori de Vielha. Vibració direcció Est
- Senyal5: Sisme. Observatori de Vielha. Vibració direcció Nord
- Senyal6: Sisme. Observatori de Vielha. Vibració direcció Vertical
- Senyal7: Pas de tren (1). Santa Coloma. Vibració al carril
- Senyal8: Pas de tren (2). Santa Coloma. Vibració al carril
- Senyal9: Pas de tren (3). Santa Coloma. Vibració al carril
- Senyal10: Pas de tren (4). Santa Coloma. Vibració al carril
- Senyal11: Pas de tren (5). Santa Coloma. Vibració al carril
- Senyal12: Excitador Mecànic (40 km/h). Taller. Vibració direcció vertical
- Senyal13: Excitador Mecànic (60 km/h). Taller. Vibració direcció vertical
- Senyal14: Excitador Mecànic (80 km/h). Taller. Vibració direcció vertical¹

A la taula 3 es mostren els màxims del valor eficaç mòbil –MTVV– d’aquests senyals, calculats en les condicions esmentades, les unitats són les del senyal de partida. A la taula 4 es mostren per a cada senyal les diferències, en dB, entre ells.

Taula 3. MTVV dels senyals experimentals analitzats.

	Ponderació exponencial		Ponderació constant	
	$\tau = 1 \text{ s}$	$\tau = 0,1 \text{ s}$	$T = 1 \text{ s}$	$T = 0,1 \text{ s}$
Senyal1	1,38	2,86	1,56	3,07
Senyal2	0,685	1,27	0,819	1,43
Senyal3	0,959	2,15	1,14	2,51
Senyal4	2,32	3,90	2,59	4,54
Senyal5	3,00	4,41	3,54	5,00

¹ Els registres dels sismes han estat proporcionats per l’Institut Geològic de Catalunya. Els registres dels trens i de l’excitador són propis.



Senyal6	1,87	2,67	2,04	3,00
Senyal7	$2,43 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-2}$
Senyal8	$2,88 \cdot 10^{-2}$	$3,50 \cdot 10^{-2}$	$3,12 \cdot 10^{-2}$	$3,91 \cdot 10^{-2}$
Senyal9	$2,45 \cdot 10^{-2}$	$2,89 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^{-2}$	$2,99 \cdot 10^{-2}$
Senyal10	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$2,98 \cdot 10^{-2}$
Senyal11	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,76 \cdot 10^{-2}$	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$2,89 \cdot 10^{-2}$
Senyal12	1,46	1,57	1,48	1,62
Senyal13	2,35	2,50	2,37	2,56
Senyal14	3,19	3,41	3,25	3,48

Taula 4. Comparació, en dB, del MTVV dels senyals experimentals analitzats.

	Ponderació exponencial		Ponderació constant	
	$\tau = 1 \text{ s}$	$\tau = 0,1 \text{ s}$	$T = 1 \text{ s}$	$T = 0,1 \text{ s}$
Senyal1	0	6,31	1,07	6,92
Senyal2	0	5,35	1,56	6,37
Senyal3	0	7,02	1,51	8,35
Senyal4	0	4,5	0,94	5,82
Senyal5	0	3,34	1,44	4,44
Senyal6	0	3,1	0,75	4,1
Senyal7	0	1,34	0,18	1,58
Senyal8	0	1,69	0,68	2,64
Senyal9	0	1,42	0,42	1,71
Senyal10	0	1	0,26	1,42
Senyal11	0	0,96	0,21	1,35
Senyal12	0	0,61	0,1	0,92



Senyal13	0	0,53	0,05	0,72
Senyal14	0	0,57	0,17	0,75

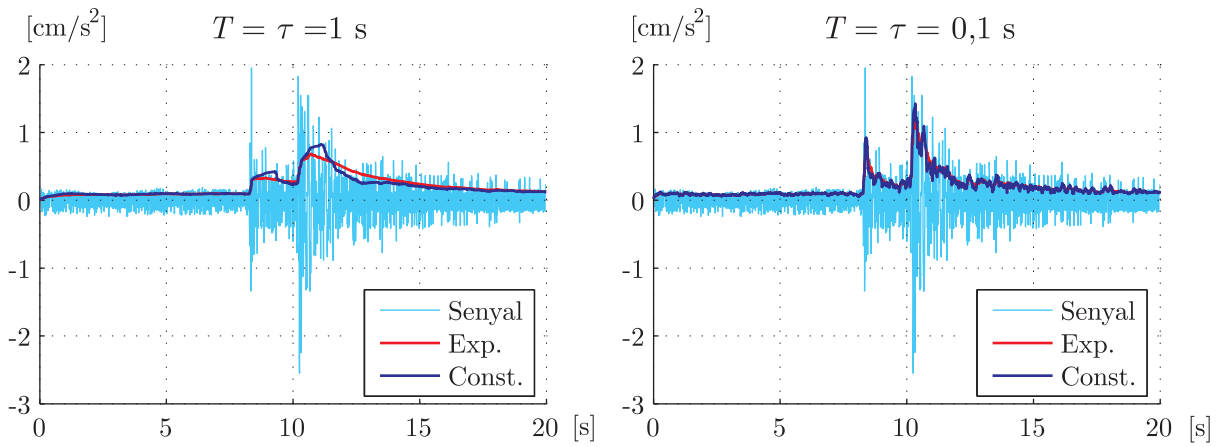
A partir dels resultats mostrats a les taules anteriors s'observa que:

- La ponderació constant dona sempre valors MTVV superiors respecte a la ponderació exponencial de manera que la diferència pot ser superior a 1 dB. Aquesta diferència és més gran quant més pics importants presenta el senyal, els senyals 1 a 6 presenten pics molt superiors a la resta, en particular els senyals 12 a 14 són estacionaris sense pics remarcables.
- Amb constant de temps τ o temps d'integració T petits els valors MTVV poden incrementar-se molt. Els increments de nou són més grans quan el senyal presenta pics més importants.

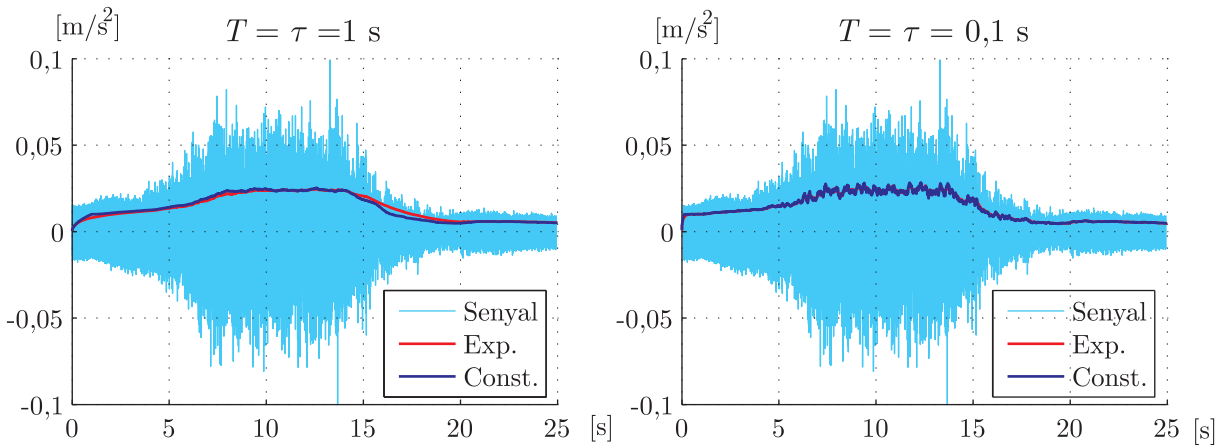
A la figura 5 es mostren els gràfics temporals dels senyals: Senyal2, Senyal11 i 25 s del Senyal12 i superposats a ells els gràfics temporals del valor eficaç mòbil calculat amb les dues ponderacions i amb $T = \tau = 1$ s i $T = \tau = 0,1$ s.



a)



b)



c)

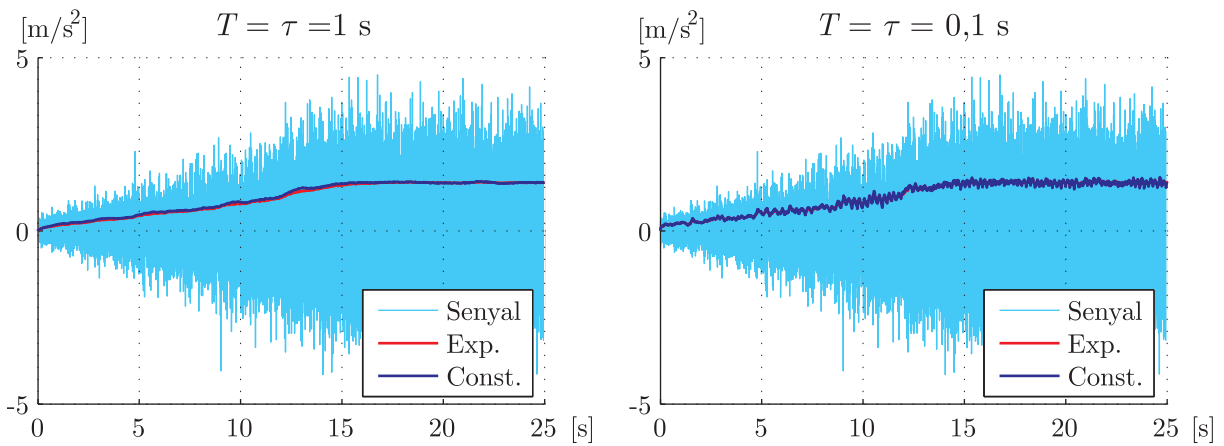


Fig. 5 Gràfics temporals del valor eficaç mòbil per als senyals:

a) Senyal2, b) Senyal11 i c) Senyal12.



5 Bibliografia

Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole-body vibration. ISO-2631-1997.

