Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

Impedància i admitància
de sistemes mecànics
Elements en sèrie i paral·lel

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

2006

Departament d'Enginyeria Mecànica

Impedància i admitància de sistemes mecànics

Elements en sèrie i paral·lel

La impedància en un punt d'un sistema mecànic de comportament lineal i paràmetres constants és una funció de resposta freqüencial que es defineix com la relació entre la Transformada de Fourier de la força que s'aplica en el punt i la Transformada de Fourier de la velocitat d'aquest causada per la força:

$$\boldsymbol{Z}\,(\omega) = \boldsymbol{F}\,(\omega) / \boldsymbol{v}\,(\omega)$$

Aquesta impedància es pot entendre com la impedància d'un element de dos extrems equivalent al sistema i que té un extrem en el punt considerat i l'altre fix, figura 1.

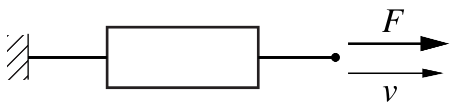
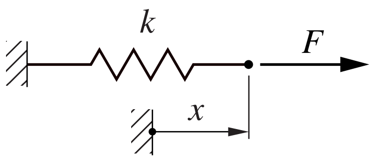
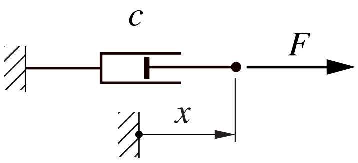


Figura 1. Sistema equivalent de dos extrems

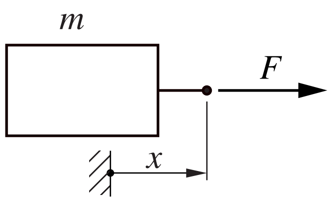
Per als elements lineals bàsics d'un sistema mecànic: molla, amortidor i massa es defineix la seva impedància a partir dels següents sistemes, figura 2:



$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{k}} = \frac{\boldsymbol{F}(\omega)}{\boldsymbol{v}(\omega)} = \frac{k\,\boldsymbol{x}(\omega)}{\boldsymbol{x}(\omega)\,\omega\mathrm{j}} = \frac{k}{\omega\mathrm{j}}$$



$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}} = \frac{\boldsymbol{F}(\omega)}{\boldsymbol{v}(\omega)} = \frac{c\,\boldsymbol{v}(\omega)}{\boldsymbol{v}(\omega)} = c$$



$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{F}(\omega)}{\boldsymbol{v}(\omega)} = \frac{m\,\boldsymbol{x}(\omega)(\omega\mathrm{j})^2}{\boldsymbol{x}(\omega)(\omega\mathrm{j})} = m\,\omega\mathrm{j}$$

Figura 2. Impedància dels elements bàsics

Per a l'element massa el punt fix se suposa que ho és en una referència galileana i que forma part de l'element; així doncs, l'element massa es considera amb dos extrems:

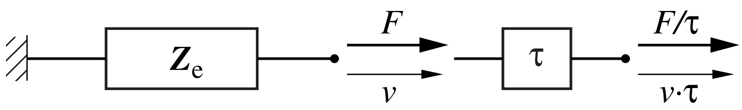
l’extrem físic que l’uneix al sistema i un extrem virtual fix a la referència d’estudi que és galileana.

Amb la consideració anterior de l’element massa, alguns sistemes mecànics de paràmetres concentrats, o d’un nombre limitat de graus de llibertat, es poden descriure com una combinació d’elements bàsics units en sèrie i paral·lel i la seva impedància en un punt es pot determinar emprant les següents regles de composició fins a obtenir un únic element equivalent entre el punt i un punt fix.

Impedància equivalent d’elements en paral·lel: $\boldsymbol{Z}_{\text{paral·lel}} = \sum_i \boldsymbol{Z}_i$

Impedància equivalent d’elements en sèrie: $\boldsymbol{Z}_{\text{sèrie}} = \left(\sum_i \boldsymbol{Z}_i^{-1} \right)^{-1}$

Els extrems que s’uneixen han de tenir el mateix moviment; això fa que la presència d’elements de transmissió, que relacionen cinemàticament el moviment de dos punts, s’hagin d’incloure en l’esquema proposat fent que la transmissió formi part d’un dels elements a unir de manera que la seva impedància queda modificada tal com s’indica a continuació, figura 3.



$$\boldsymbol{Z}_{\text{mod.}} = \frac{\boldsymbol{F}(\omega)/\tau}{\boldsymbol{v}(\omega)\cdot\tau} = \boldsymbol{Z}_{\text{e}}\,\frac{1}{\tau^2}$$

Figura 3. Influència d’una transmissió en la impedància

Si en lloc d’emprar impedàncies es treballa amb admitàncies, inverses unes de les altres, només cal considerar que també s’inverteixen les regles de composició:

Admitància equivalent d’elements en paral·lel: $\boldsymbol{Y}_{\text{paral·lel}} = \left(\sum_i \boldsymbol{Y}_i^{-1} \right)^{-1}$

Admitància equivalent d’elements en sèrie: $\boldsymbol{Y}_{\text{sèrie}} = \sum_i \boldsymbol{Y}_i$

El moviment del sistema es pot descriure amb el desplaçament o l’acceleració en lloc de la velocitat; en aquest cas, s’obtenen altres funcions de resposta freqüencial que es poden estudiar de la mateixa manera que la impedància i l'admitància. També el moviment del sistema pot ser angular en lloc de lineal i el tractament és el mateix.

Exemple 1

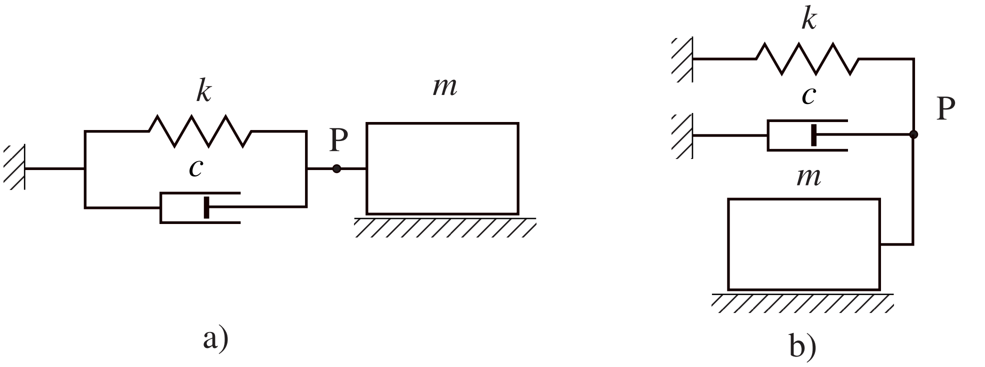


Figura 4. Esquema d'un sistema massa-molla-amortidor: a) disposició habitual, b) disposició per mostrar la disposició sèrie-paral·lel

Els esquemes de la figura 4 són equivalents i la impedància en el punt P del sistema que representen és:

$$\boldsymbol{Z}\,(\omega) = m\,\omega\mathrm{j} + c + \frac{k}{\omega\mathrm{j}}$$

Exemple 2

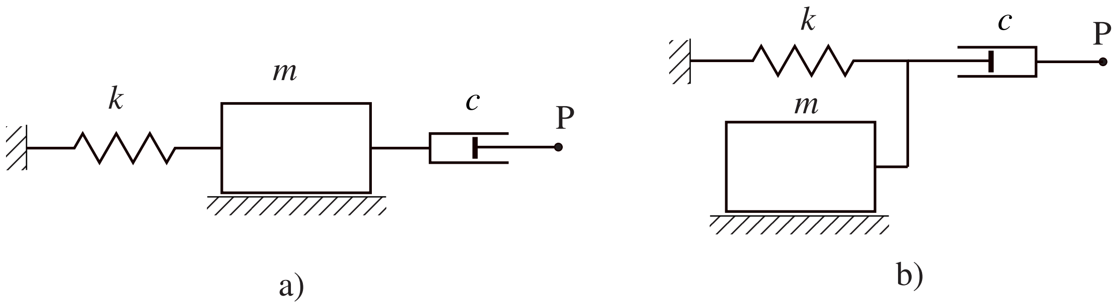


Figura 5. Esquema d'un sistema massa-molla-amortidor: a) disposició habitual, b) disposició per mostrar la disposició sèrie-paral·lel

Els esquemes de la figura 5 són equivalents i la impedància en el punt P del sistema que representen és:

$$\boldsymbol{Z}\,(\omega) = \left(\left(\frac{k}{\omega\mathrm{j}} + m\,\omega\mathrm{j} \right)^{-1} + c^{-1} \right)^{-1}$$

Exemple 3

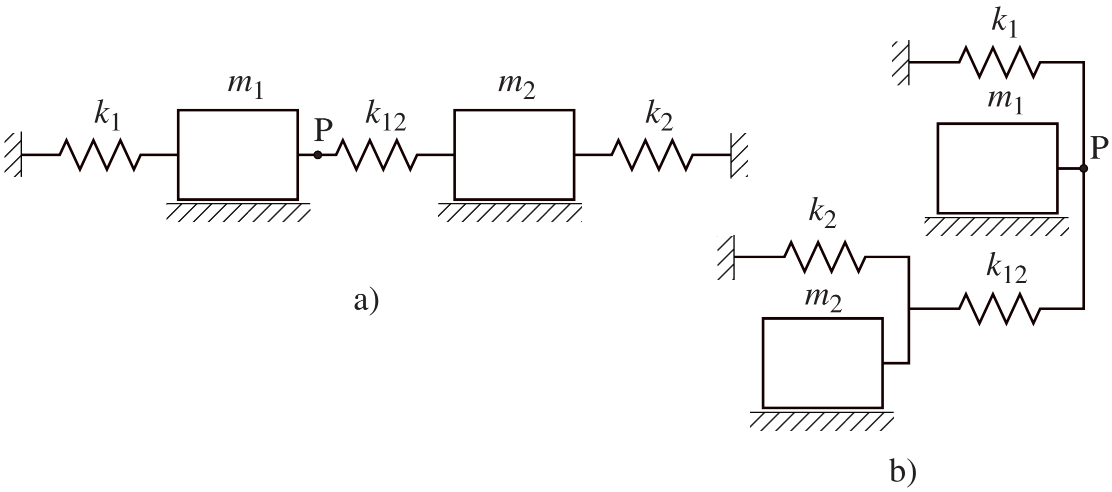


Figura 6. Esquema d'un sistema de dos graus de llibertat: a) disposició habitual, b) disposició per mostrar la disposició sèrie-paral·lel

Els esquemes de la figura 6 són equivalents i la impedància en el punt P del sistema de dos graus de llibertat que representen és:

$$\boldsymbol{Z}\left(\omega\right)=\frac{k_1}{\omega \mathrm{j}}+m_1\,\omega \mathrm{j}+\left(\left(\frac{k_2}{\omega \mathrm{j}}+m_2\,\omega \mathrm{j}\right)^{-1}+\left(\frac{k_{12}}{\omega \mathrm{j}}\right)^{-1}\right)^{-1}$$