



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

Selecció d'una suspensió en base al confort

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

2007



Departament d'Enginyeria Mecànica

Selecció d'una suspensió en base al confort

Per fer un estudi preliminar de la suspensió d'un vehicle i relacionar el seu comportament dinàmic amb el confort es considera el model de comportament lineal de la figura 1.

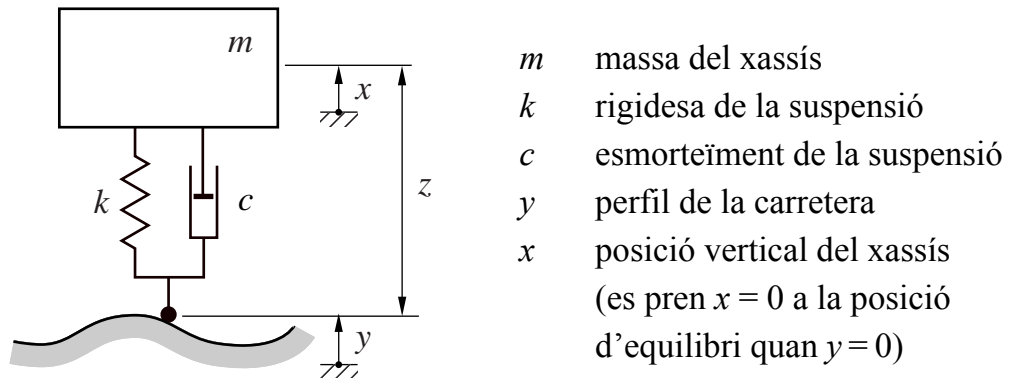


Figura 1 Model d'un grau de llibertat

Per analitzar la influència dels paràmetres de la suspensió en la relació entre el perfil de la carretera i el moviment del xassís cal plantejar l'equació del moviment del xassís

$$m \ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) \quad (1)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = ky + c \dot{y} \quad (2)$$

Dividint per m i definint els paràmetres pulsació pròpia ω_0 , o freqüència pròpia f_0 , esmorteïment crític c_c i raó d'esmorteïment ζ

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad c_c = 2\sqrt{km} \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

l'equació del moviment es pot rescriure com

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y \quad (3)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y \quad (4)$$



Ja sigui de l'expressió 3 o de la 4, es troba de manera immediata la funció de resposta freqüencial que relaciona la Transformada de Fourier Y del perfil i la Transformada de Fourier X del moviment del xassís

$$\frac{X}{Y} = \frac{\frac{c}{m} \omega j + \frac{k}{m}}{\left(1 - \left(\frac{k}{m}\right) \omega^2\right) + \frac{c}{m} \omega j} = \frac{\omega_0^2 + 2\zeta \omega \omega_0 j}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\zeta \omega \omega_0 j} \quad (5)$$

Queda clar, en qualsevol de les expressions anteriors, que per a un mateix perfil de carretera dos vehicles diferents, representats amb el model de la figura 1, respondran de la mateixa manera si es mantenen les relacions

$$\frac{k}{m} \quad \text{o} \quad f_0 = 2\pi \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{c}{m} \quad \text{o} \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{c}{2m \omega_0} = \frac{c \omega_0}{2k}$$

En els vehicles, el comportament dels elements de la suspensió no és lineal com el del model proposat fins ara però, en general, és prou proper a la realitat considerar la suspensió formada per dos elements en paral·lel: un de comportament elàstic (molles, ballestes, barres de torsió...) i un de comportament dissipatiu d'energia (amortidor). Cadascun d'aquests elements realitza una força entre els seus extrems (xassís i roda) que es pot prendre positiva de repulsió i definida per

$$\begin{aligned} \text{Element elàstic} \quad & f_e(z) = f_e(x - y) \\ \text{Element amortidor} \quad & f_d(\dot{z}) = f_d(\dot{x} - \dot{y}) \end{aligned}$$

Ara l'equació del moviment és

$$m \ddot{x} = f_e(x - y) + f_d(\dot{x} - \dot{y}) \quad (6)$$

$$\ddot{x} = \frac{f_e}{m}(x - y) + \frac{f_d}{m}(\dot{x} - \dot{y}) \quad (7)$$

De nou es posa de manifest, amb aquest model, que perquè dos vehicles tinguin el mateix comportament les seves suspensions han de tenir el mateix comportament elàstic i dissipatiu definit per les funcions f_e/m i f_d/m , és a dir les forces elàstica i dissipativa han d'estar escalades segons la massa del vehicle.



Pel que fa al comportament elàstic, si aquest es prou lineal la condició anterior es tradueix en la igualtat de freqüències pròpies. Pel que fa al comportament dissipatiu, el comportament dels amortidors no es pot considerar lineal i la condició anterior es tradueix en la igualtat de les corbes velocitat-força dels amortidors dividides per la massa del vehicle, és a dir $f_{d1}/m_1 = f_{d2}/m_2$.

Per avaluar per separat la suspensió del davant i la del darrera, en el món de l'automoció, en alguns casos es considera el vehicle representat per dos sistemes com el descrit a la figura 1; un representa la part anterior i l'altre la part posterior del vehicle, model de davant-darrera de la figura 2. Les característiques elàstica i dissipativa de cada sistema són les de la suspensió corresponent i la massa es calcula a partir del pes del vehicle que gravita sobre aquesta suspensió. Amb aquest model la comparació entre vehicles es fa comparant la suspensió anterior i la posterior per separat.

Es pot considerar també que el vehicle és simètric respecte al pla vertical longitudinal i aleshores cada sistema del model de la figura 2 es pot prendre, dividint tots els paràmetres per dos, com un quart de vehicle. Aquesta consideració dóna lloc al model de quart de vehicle i no afecta els resultats anteriors ja que la proporcionalitat entre els paràmetres es manté.

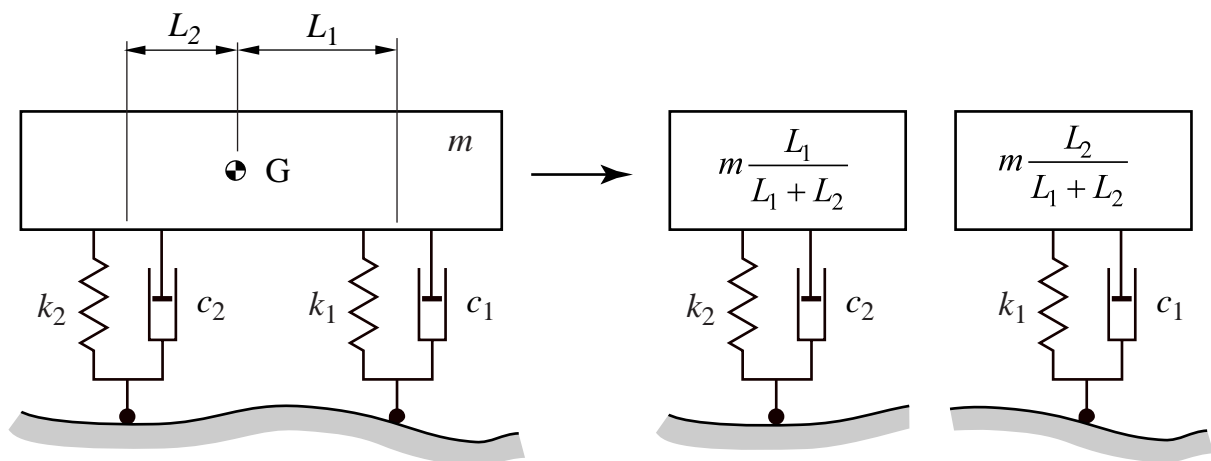


Figura 2. Model de davant-darrera

Per tal de millorar el model davant-darrera, és convenient considerar el model de mig vehicle de la figura 3 que inclou a més de la translació vertical del xassís la seva rotació al voltant de l'eix transversal. Això fa que calgui incloure en els paràmetres definidors del model el moment d'inèrcia del xassís respecte a aquest eix I_G .

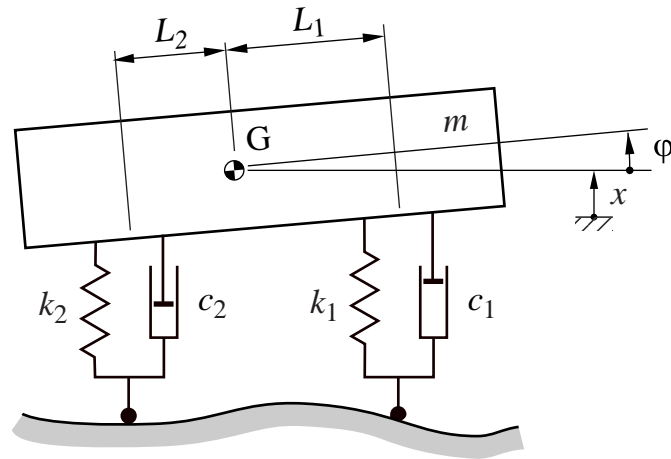


Figura 3. Model de mig vehicle

Les equacions de moviment del model de mig vehicle amb el comportament geomètric linealitzat, vàlid per a angles de rotació del xassís petits, són

$$\begin{cases} m \ddot{x} = f_{e1}(z_1) + f_{e2}(z_2) + f_{d1}(\dot{z}_1) + f_{d2}(\dot{z}_2) \\ I_G \ddot{\varphi} = (f_{e1}(z_1) + f_{d1}(\dot{z}_1))L_1 - (f_{e2}(z_2) + f_{d2}(\dot{z}_2))L_2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} f_{e1}(z_1) + f_{e2}(z_2) + f_{d1}(\dot{z}_1) + f_{d2}(\dot{z}_2) \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{I_G} (f_{e1}(z_1) + f_{d1}(\dot{z}_1))L_1 - (f_{e2}(z_2) + f_{d2}(\dot{z}_2))L_2 \end{cases} \quad (9)$$

amb $z_1 = x + \varphi L_1$, $z_2 = x - \varphi L_2$

En aquest cas no es coneix cap condició general que garanteixi la igualtat del comportament de la suspensió de dos vehicles diferents. El model davant-darrera només planteja i resol la igualtat si es negligeix l'efecte de la rotació, és a dir es considera $\varphi = 0$ en tot instant. Ara bé, la manca de confort està associada a pertorbacions del perfil de la carretera que incideixen de manera seqüencial sobre els eixos davanter i posterior, i per tant provoquen un moviment del xassís amb $\varphi \neq 0$.

En general, per a situacions no excessivament agressives, les forces elàstiques d'aquest model es poden linealitzar i l'equació del moviment pren la forma de l'expressió 10. Aleshores es poden determinar les freqüències pròpies i els modes propis no esmorteïts del sistema a partir dels valors propis i dels vectors propis de la matriu dinàmica \mathbf{D} associada a les equacions de moviment.



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_1(x + \varphi L_1) - k_2(x - \varphi L_2) + f_{d1}(\dot{z}_1) + f_{d2}(\dot{z}_2) \\ I_G \ddot{\varphi} = -k_1(x + \varphi L_1)L_1 + k_2(x - \varphi L_2)L_2 + f_{d1}(\dot{z}_1)L_1 - f_{d2}(\dot{z}_2)L_2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\varphi = f_{d1}(\dot{z}_1) + f_{d2}(\dot{z}_2) \\ I_G \ddot{\varphi} + (k_1L_1 - k_2L_2)x + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\varphi = f_{d1}(\dot{z}_1)L_1 - f_{d2}(\dot{z}_2)L_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1L_1 - k_2L_2 \\ k_1L_1 - k_2L_2 & k_1L_1^2 + k_2L_2^2 \end{bmatrix}$$

La igualtat de freqüències pròpies i modes propis de dos vehicles requereix 4 igualtats: dues per a les freqüències pròpies i dues per a la relació entre coordenades de cada mode propi. Com que només es disposa de les dues rigideses k_1 i k_2 per ajustar, el problema en general no té solució. Una proposta habitual és prendre les constants k_1 i k_2 proporcionals a la massa que gravita sobre cada eix

$$\begin{aligned} \text{eix 1} \quad m_1 &= m \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad \rightarrow \quad k_1 = k \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\ \text{eix 2} \quad m_2 &= m \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad \rightarrow \quad k_2 = k \frac{L_1}{L_1 + L_2} \end{aligned}$$

Amb aquesta elecció es compleix $k_1L_1 = k_2L_2$ i, com es pot veure a les expressions 10 i 11, amb absència d'esmoreïment, $f_{d1}(\dot{z}_1) = 0$ i $f_{d2}(\dot{z}_2) = 0$, els moviments lliures de translació i de rotació del xassís estan desacoblats, poden produir-se de manera independent, i per tant descriuen els modes propis de vibració no esmoreïts. Les freqüències pròpies associades són

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1L_1^2 + k_2L_2^2}{I_G}} = f_1 \sqrt{\frac{L_1L_2}{r_G^2}} \quad \text{amb } r_G = \sqrt{\frac{I_G}{m}} \quad (\text{radi de gir del xassís}) \quad (13)$$

Aquestes freqüències corresponen respectivament al mode propi de translació i al mode propi de rotació. Com es pot veure a l'expressió 13 ajustar la rigidesa de la suspensió, fent-la proporcional a la massa del vehicle, per igualar la primera freqüència pròpia de dos vehicles no garanteix la igualtat de la segona, a no ser que per



exemple existeixi una relació d'escala entre els dos vehicles.

En resum doncs, el model davant-darrera pot donar uns valors de partida per a la caracterització i comparació de suspensions però per fer-ne un estudi ampli és imprescindible utilitzar com a mínim el model de mig vehicle proposat. Per utilitzar-lo cal integrar les equacions del moviment que el descriuen, expressions 8 o 9 i si el comportament elàstic és prou lineal 10 o 11, per a un conjunt representatiu de perfils de carretera.

