Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

VIBRACIONS MECÀNIQUES

PROBLEMES
TEMES MONOGRÀFICS

Salvador Cardona Foix

Lluïsa Jordi Nebot

Departament d'Enginyeria Mecànica

Vibracions Mecàniques. Problemes. Temes monogràfics

Febrer 2003

Edita: Salvador Cardona Foix

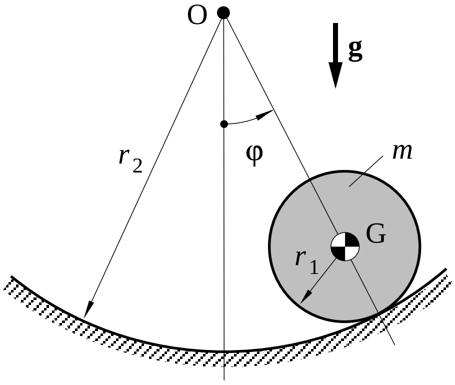
Dipòsit Legal: B-10186-2003

I.S.B.N.: 84-95355-51-5

Imprimeix Servis Gràfics Copisteria Imatge, S.L.
Cinca 8, 08030 Barcelona
www.copisteriaimatge.com
Telèfon: 93 345 19 92
Printed in Spain

Capítol 1

P1-1

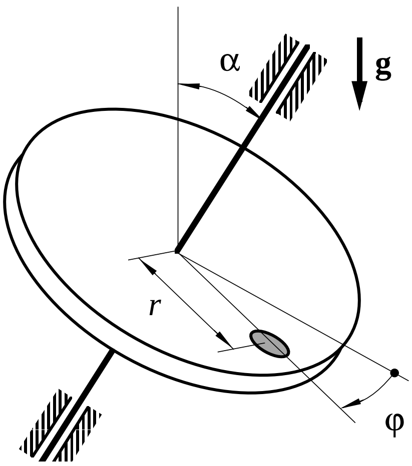


r_1 = 0,10 m	r_2 = 0,45 m

El corró de la figura rodola sense lliscar sobre la pista circular fixa. Determineu l'equació del moviment per a petites oscil·lacions a l'entorn de la posició d'equilibri.

Solució: $\ddot{\varphi} + 18,69\varphi = 0$

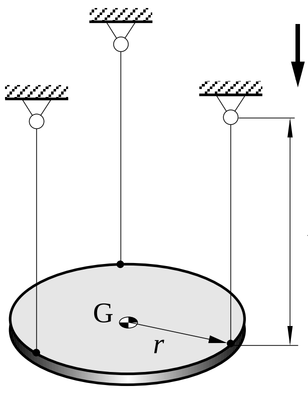
P1-2



L'eix de la roda de la figura forma un angle α amb la direcció vertical. El moment axial d'inèrcia de la roda és I i sobre ella es fixa una petita massa m. Determineu l'equació del moviment per a les petites oscil·lacions a l'entorn de la posició d'equilibri.

Solució: $\left(I + mr^2\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\varphi = 0$

P1-3



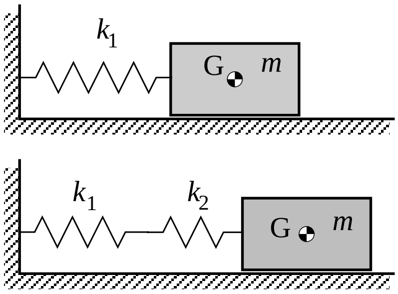
L = 0,6 m	r = 0,2 m	T = 1,3 s

El volant de la figura està suspès per tres fils de manera que en repòs l'eix del volant i els fils són verticals. Si el període d'oscil·lació del volant a l'entorn de la direcció vertical i amb el centre fix és T = 1,3 s, determineu el radi de gir r_G axial del volant.

Solució: r_G = 0,1673 m

Capítol 2

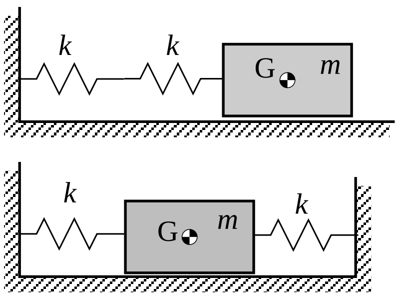
P2-1



Un sistema massa-molla té una freqüència pròpia f_0. Si s'afegeix una segona molla en sèrie a la primera la freqüència pròpia passa a ser $f_0/2$. Determineu la constant de la segona molla en funció de la de la primera.

Solució: $k_2 = k_1/3$

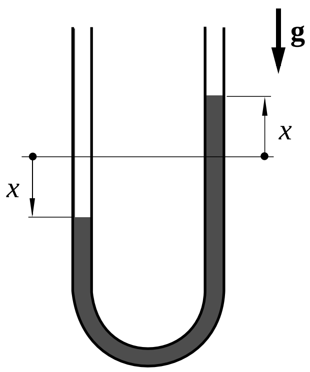
P2-2



Una massa *m* unida a l'extrem lliure d'una molla vibra amb una freqüència pròpia f_0. Determineu la freqüència pròpia f'_0 si la massa s'uneix al punt mig de la molla amb els seus extrems fixats.

Solució: $f'_0 = 2 f_0$

P2-3



Determineu el període *T* de les oscil·lacions lliures de la columna de fluid d'un manòmetre en U com el de la figura que té una llargada total d'aquesta columna L = 2 m.

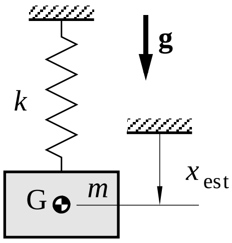
Solució: T = 2,006 s

P2-4

Un sistema massa-molla té una freqüència pròpia f_0 = 16 Hz. Si la massa s'incrementa amb m' = 0,1 kg la nova freqüència pròpia passa a ser f'_0 = 15,49 Hz. Determineu la massa *m* inicial i la constant *k* de la molla.

Solució: m = 1,494 kg k = 15,10 N/mm

P2-5

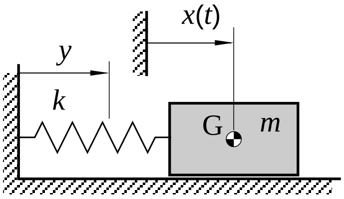


$m = 20$ kg $x_{est} = 10$ mm

Una massa $m = 20$ kg penjada de l'extrem d'una molla li produeix en repòs un allargament $x_{est} = 10$ mm. Determineu la freqüència pròpia del sistema massa-molla.

Solució: $f_0 = 4{,}985$ Hz

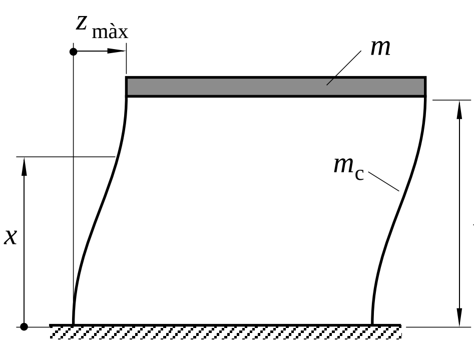
P2-6

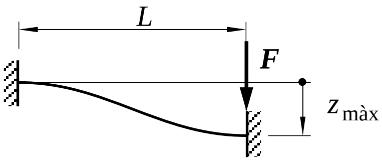


En un sistema lineal massa-molla de massa m i rigidesa k, determineu com afecta, en primera aproximació, la massa m_e de la molla en la freqüència pròpia del sistema (Preneu la densitat lineal $\rho(y)$ i la deformació $[\Delta l/l](y)$ de la molla uniformes).

Solució: $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{k/(m + m_e/3)}$

P2-7





$k = F / z_{màx} = 12\, EI / L^3$

$L = 10$ m $I = 2{,}5\ 10^{-3}$ m^4
$m = 60\ 10^3$ kg $m_c = 4\ 10^3$ kg
$E = 200$ GPa

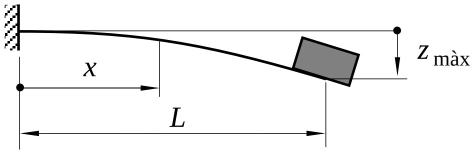
La figura esquematitza el sostre d'una nau industrial suportat per columnes encastades en els seus extrems. Determineu la freqüència pròpia del moviment horitzontal del sostre,

a) Negligint la inèrcia de les columnes.

b) Considerant que les columnes són uniformes, de massa m_c i que la seva deflexió es pot aproximar mitjançant l'expressió
$$z(x) = (1/2)z_{màx}(1 - \cos(\pi x / L))$$

Solució: a) $f_0 = 2{,}251$ Hz
b) $f_0' = 2{,}197$ Hz

P2-8



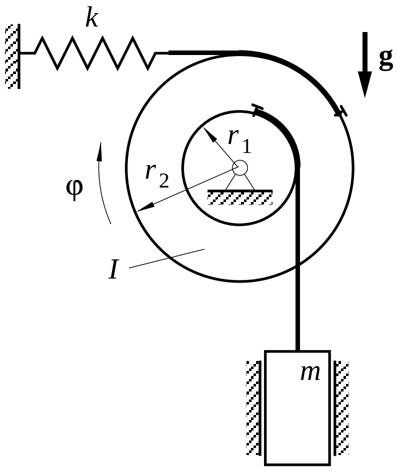
Una biga uniforme encastada en un extrem i lliure a l'altre té una massa important en l'extrem lliure de manera que en oscil·lar lliurement la seva deflexió es pot aproximar per l'expressió:

$$z(x) = (z_{\text{màx}}/2)\left((x/L)^3 - 3(x/L)^2\right)$$

corresponent a la deflexió estàtica de la biga causada per una força concentrada a l'extrem lliure. Determineu la massa reduïda de la biga al moviment del seu extrem lliure.

Solució: m_{red} = (33/140) m_{biga}

P2-9

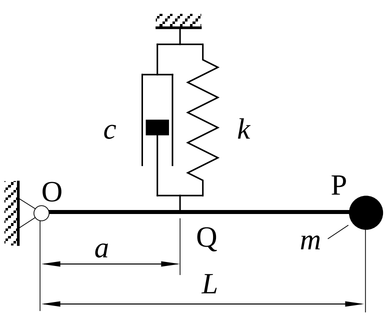


m = 10 kg	I = 0,05 kg m^2
r_1 = 0,1m	r_2 = 0,2 m
k = 1 kN/m	

En el sistema de la figura les politges de radi r_1 i r_2 són solidàries. Determineu la freqüència de les oscil·lacions lliures a l'entorn de la posició d'equilibri.

Solució: f_0 = 2,60 Hz

P2-10

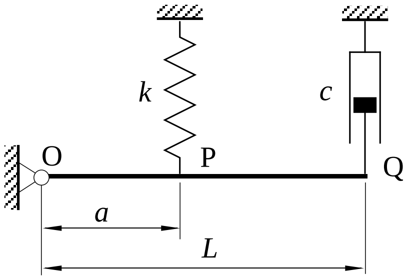


En el sistema de la figura la barra OP és d'inèrcia negligible. Determineu l'expressió de: l'esmorteïment crític, la freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment.

Solució:

$$c_{\text{c}} = 2aL\sqrt{km}$$
$$\omega_0 = (a/L)\sqrt{k/m}$$
$$\zeta = ca\big/\left(2L\sqrt{km}\right)$$

P2-11



La barra uniforme OQ de massa m de la figura està articulada pel punt O. Determineu:

a) La freqüència pròpia.

b) La raó d'esmorteïment.

Solució: a) $\omega_0 = (a/L)\sqrt{3k/m}$
b) $\zeta = \sqrt{3}cL \Big/ \left(2a\sqrt{km}\right)$

P2-12

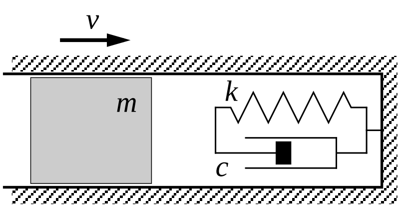
La freqüència pròpia d'un sistema massa-molla és $f_0 = 1/\pi$ Hz. Si la massa es separa 20 mm de la posició d'equilibri i se li dóna una velocitat de 80 mm/s dirigida cap aquesta posició, determineu:

a) L'amplitud x_p de les osci·lacions.

b) L'acceleració màxima $a_{màx}$.

Solució: a) x_p = 44,72 mm
b) $a_{màx}$ = 178,9 mm/s^2

P2-13



m = 4,53 kg	v = 15,24 m/s
c = 175 N/(m/s)	k = 35 N/mm

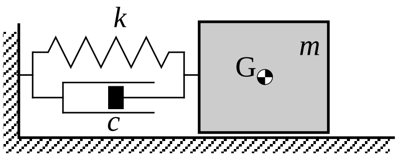
Un pistó avança dins d'un tub a una velocitat v = 15,24 m/s i entra en contacte amb el grup molla-amortidor de la figura. Determineu:

a) La freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment del sistema massa-molla-amortidor mentre es manté en contacte.

b) El temps t per arribar a la màxima compressió, la compressió màxima $x_{màx}$ del grup molla-amortidor i l'acceleració màxima $a_{màx}$ del bloc.

Solució: a) ω_0 = 87,90 rad/s ζ = 0,2197
b) t = 0,0157 s $x_{màx}$ = 0,1279 m $a_{màx}$ = 1092 m/s^2

P2-14



m = 4 kg $\quad$ k = 5 N/mm
c = 20 N/(m/s)

Per al sistema massa-molla-amortidor de la figura determineu:

a) La freqüència pròpia.

b) La raó d'esmorteïment i el decrement logarítmic.

c) La relació entre dos màxims separats per 3 oscil·lacions.

Solució: a) $f_0 = 5{,}627$ Hz
b) $\zeta = 70{,}71\ 10^{-3}$ $\quad$ $\delta = 0{,}4454$
c) $x_i\ /\ x_{i+3} = 3{,}805$

P2-15

En un sistema massa-molla-amortidor de massa $m = 2$ kg i rigidesa $k = 3{,}2$ N/mm, l'esmorteïment fa que la relació entre dos màxims successius de les seves oscil·lacions lliures sigui $r = 0{,}98$. Determineu el decrement logarítmic δ, la raó d'esmorteïment ζ i la constant d'esmorteïment c.

Solució: $\delta = 0{,}0202$ $\quad$ $\zeta = 3{,}215\ 10^{-3}$ $\quad$ $c = 0{,}5145$ N/(m/s)

P2-16

Els paràmetres d'un sistema vibratori d'un grau de llibertat i comportament lineal són massa $m = 4{,}534$ kg, rigidesa $k = 3{,}5$ kN/m i esmorteïment viscós $c = 12{,}43$ N s/m. Determineu la raó d'esmorteïment ζ, el decrement logarítmic δ i la relació entre desplaçaments màxims successius.

Solució: $\zeta = 0{,}0493$ $\quad$ $\delta = 0{,}3104$ $\quad$ $x_i/x_{i+1} = 1{,}364$

P2-17

Els paràmetres d'un sistema vibratori d'un grau de llibertat i comportament lineal són massa $m = 17{,}5$ kg, rigidesa $k = 7$ kN/m i esmorteïment viscós $c = 70$ N s/m. Determineu la raó d'esmorteïment ζ, la freqüència de les oscil·lacions esmorteïdes f_e i la relació entre desplaçaments pic a pic successius.

Solució: $\zeta = 0{,}1000$ $\quad$ $f_e = 3{,}167$ $\quad$ $x_i/x_{i+1} = 1{,}880$

P2-18

La força que fa un fluid sobre un sòlid que es mou en el seu interior a velocitat moderada es pot considerar oposada a la velocitat relativa i de mòdul proporcional al quadrat del mòdul de la velocitat relativa, $\boldsymbol{F} = -\ a\ v\ \boldsymbol{v}$. Determineu l'esmorteïment equivalent introduït per aquesta força en un sistema vibratori que es mou amb moviment harmònic de freqüència f i amplitud x_p.

Solució: $c_\mathrm{eq} = (16/3)\, a f x_\mathrm{p}$

P2-19

Determineu l'esmorteïment equivalent causat per un frec sec de magnitud F_0 en un oscil·lador que es mou amb moviment harmònic de freqüència f i amplitud x_p.

Solució: $c_\mathrm{eq} = (2F_0)\big/\left(\pi^2 f x_\mathrm{p}\right)$

P2-20

En un sistema vibratori massa-molla-amortidor la rigidesa de la molla és $k = 525$ N/m, el període de les seves oscil·lacions lliures és $T = 1{,}80$ s i la relació entre dos desplaçaments màxims consecutius és $x_i / x_{i+1} = 4{,}2$. Determineu:

a) La massa m i el coeficient d'esmorteïment c.

b) L'amplitud x_p i la fase φ del moviment estacionari causat per una força $F = 2 \cos (3t)$ actuant sobre el sistema.

Solució: a) $m = 40{,}95$ kg $\quad c = 65{,}30$ N/(m/s)
b) $x_\mathrm{p} = 8{,}0$ mm $\quad \varphi = 51{,}39°$

P2-21

En un sistema vibratori d'un grau de llibertat excitat amb una força harmònica, determineu la raó de freqüències ρ per a la qual l'amplitud de les oscil·lacions en règim estacionari és màxima.

Solució: $\rho = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

P2-22

Un component d'una màquina té una massa m = 2 kg i excitat per una força harmònica d'amplitud F_p = 25 N es mou en ressonància, f_0 = 5 Hz, amb un desplaçament d'amplitud x_p = 10 mm. Determineu:

a) El coeficient d'esmorteïment c.

Si la freqüència de la força d'excitació passa a ser f = 4 Hz i es prescindeix d'element esmorteïdor,

b) Quina és ara l'amplitud x_p' del desplaçament en règim estacionari?

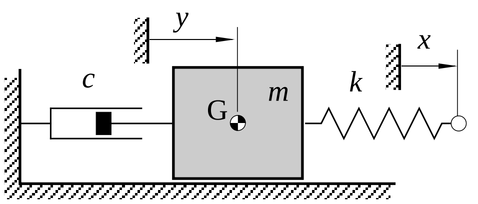
Solució: a) c = 79,58 N/(m/s)
b) x_p' = 35,18 mm

P2-23

Un sistema vibratori excitat amb una força harmònica oscil·la en ressonància, f_0 Hz, amb una amplitud x_p = 5,8 mm i si la freqüència de la força d'excitació passa a ser f_1 = 0,8 f_0 l'amplitud de les oscil·lacions és x_p' = 4,6 mm. Determineu la raó d'esmorteïment del sistema.

Solució: ζ = 0,1847

P2-24

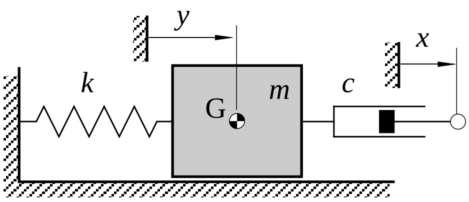


Per al sistema de la figura determineu la resposta freqüencial entre el moviment de l'extrem lliure de la molla $\boldsymbol{x}$ pres com a excitació i el del bloc $\boldsymbol{y}$ pres com a resposta.

Solució: $\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x} = 1\Big/\left(\left(1-\rho^2\right)+2\zeta\rho j\right)$

amb $\rho = \omega\Big/\sqrt{k/m}$ i $\zeta = c\Big/2\sqrt{km}$

P2-25

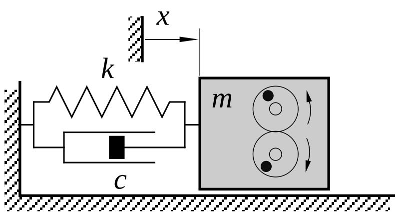


Per al sistema de la figura determineu la resposta freqüencial entre el moviment de l'extrem lliure de l'amortidor $\boldsymbol{x}$ pres com a excitació i el del bloc $\boldsymbol{y}$ pres com a resposta.

Solució: $\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x} = (2\zeta\rho j)\Big/\left(\left(1-\rho^2\right)+2\zeta\rho j\right)$

amb $\rho = \omega\big/\sqrt{k/m}$ i $\zeta = c\big/2\sqrt{km}$

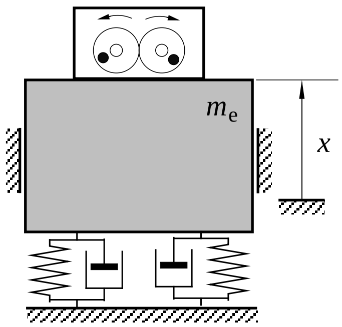
P2-26



En un sistema excitat per dos rotors desequilibrats iguals que giren amb velocitats angulars oposades, s'observa en ressonància una amplitud del moviment x_{p1} = 6 mm. A mesura que la velocitat de rotació dels rotors augmenta l'amplitud del moviment s'estabilitza en x_{p2} = 0,8 mm. Determineu la raó d'esmorteïment del sistema.

Solució: ζ = 0,066

P2-27

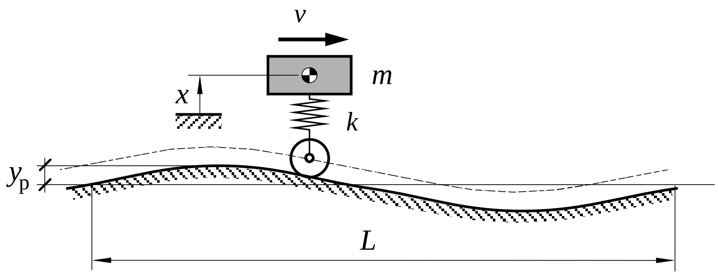


m_e = 150 kg	u = 0,1 kg m
n = 900 min^{-1}	x_p = 20 mm

Per tal de fer moure una estructura s'utilitza un excitador format per dos rotors desequilibrats iguals i que giren amb velocitats angulars oposades. La massa de l'estructura és m_e = 150 kg i el desequilibri (mr) és u = 0,1 kg m. S'observa que l'estructura ressona amb una amplitud del moviment x_p = 20 mm quan la velocitat de rotació dels rotors és n = 900 min^{-1}. Determineu la rigidesa i la raó d'esmorteïment de l'estructura.

Solució: k = 1,332 kN/mm $\qquad \zeta$ = 0,033

P2-28



La figura representa un model molt simplificat (d'un GL) d'un vehicle amb suspensió que circula per una carretera ondulada. Determineu (Preneu x a partir de la posició d'equilibri del xassís per a $y = 0$ i considereu harmònic el moviment del centre de la roda i constant la velocitat del vehicle):

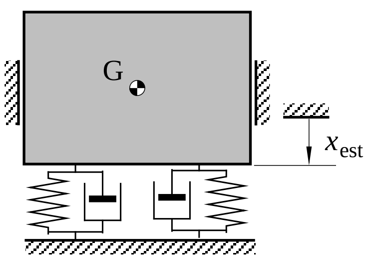
a) L'amplitud de les oscil·lacions verticals x_p del xassís en funció de la velocitat d'avanç v del vehicle.

b) La velocitat d'avanç v més desfavorable.

Solució: a) $x_p = y_p \big/ \left(1-\rho^2\right)$ amb $\rho = 2\pi v \sqrt{m/k} \big/ L$

b) $v = L\sqrt{k/m} \big/ (2\pi)$

P2-29



Un aparell instal·lat en un vehicle s'ha d'aïllar, mitjançant una suspensió elàstica, de les vibracions del suport causades pel motor que pot girar entre 1600 min^{-1} i 2200 min^{-1}. Determineu la deflexió estàtica x_{est} mínima de la suspensió elàstica si s'ha de garantir un aïllament del 85% (Factor de transmissió 0,15).

Solució: x_{est} = 2,679 mm

P2-30

Una màquina de massa $m = 450$ kg està recolzada sobre uns elements elàstics que a causa del seu pes es deformen $x_{est} = 5$ mm. Si la màquina té un rotor amb un desequilibri $u = 0{,}25$ kg m que gira a $n = 1200$ min^{-1}, determineu:

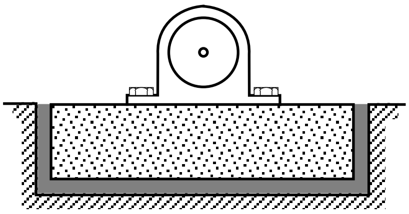
a) L'amplitud de la força transmesa al terra i la del moviment de la màquina.

Si la màquina es munta sobre una llosa de formigó de 1200 kg i la rigidesa dels elements elàstics s'augmenta a fi de mantenir la deformació estàtica en 5 mm,

b) Quines són ara les noves amplituds?

Solució: a) $F_{Tp} = 560{,}0$ N $\quad x_p = 0{,}6344$ mm
b) $F_{Tp} = 560{,}0$ N $\quad x_p = 0{,}1730$ mm

P2-31



$m_m = 68$ kg	$m_l = 1200$ kg
$n = 900$ min^{-1}	$\zeta = 0{,}1$

Un motor elèctric de massa $m_m = 68$ kg està muntat sobre una llosa de massa $m_l = 1200$ kg. El muntatge ressona quan la velocitat de gir del motor és $n = 900$ min^{-1} i la seva raó d'esmorteïment és $\zeta = 0{,}1$. Si a causa del desequilibri del rotor el motor genera una força $F = 1000 \sin(150\, t)$, determineu:

a) L'amplitud de l'acceleració vertical de la llosa $\ddot{x}_p$.

b) L'amplitud de la força transmesa al terra F_{Tp}.

Solució: a) $\ddot{x}_p = 1{,}276$ m/s^2
b) $F_{Tp} = 670{,}3$ N

P2-32

S'ha d'instal·lar un instrument delicat, de massa $m = 110$ kg, sobre una superfície que vibra a $f = 20$ Hz amb una acceleració d'amplitud $a_p = 0{,}15$ m/s^2. Si entre la superfície i l'instrument s'intercala un element elàstic de rigidesa $k = 300$ N/mm i esmorteïment $c = 500$ N/(m/s), determineu l'amplitud de l'acceleració a_{Tp} transmesa a l'instrument.

Si l'amplitud de l'acceleració màxima que pot suportar l'instrument és $a_{màx} = 20$ mm/s^2, i només es disposa d'elements elàstics del tipus indicat, suggeriu una solució i feu els càlculs de comprovació necessaris per validar-la.

Solució: $a_{Tp} = 31{,}96$ mm/s^2

P2-33

El comportament vibratori d'una bancada on hi ha fixat un motor es pot descriure amb suficient aproximació com un sistema d'un GL amb moviment vertical. La freqüència de rotació del motor és f = 50 Hz i la vibració és deguda al desequilibri del rotor.

Experimentalment s'ha determinat que per a aquest sistema la freqüència pròpia és f_0 = 40 Hz, la raó d'esmorteïment és ζ = 0,025 i que excitant a aquesta freqüència amb una força d'amplitud F_p = 100 N el desplaçament és d'amplitud x_p = 1 mm. Determineu:

a) La separació temporal T_d entre màxims consecutius i el decrement logarítmic δ de la resposta lliure.

b) La massa m, la constant de rigidesa k i la constant d'esmorteïment c del sistema.

En posar en marxa el motor s'observa que la vibració de la bancada és d'amplitud x_{p1} = 0,1 mm i es decideix modificar la bancada duplicant la massa total. Determineu:

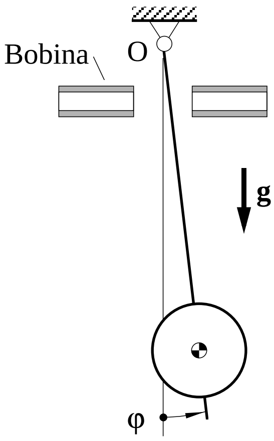
c) La força d'excitació F_{Ep} provocada pel funcionament del motor.

d) La vibració x_{p2} de la bancada i la força transmesa al terra F_{Tp} després de la modificació.

Refeu l'apartat d) si la modificació consistís en duplicar la rigidesa.

Solució:	a) T_d = 25,01 ms	δ = 0,1571	
	b) m = 31,66 kg	k = 2 kN/mm	c = 397,9 N/(m/s)
	c) F_{Ep} = 113,2 N		
	d) x_{p2} = 26,62 μm	F_{Tp} = 53,35 N	
	d') x_{p2} = 128,1 μm	F_{Tp} = 512,5 N	

P2-34



El pèndol de la figura es manté en funcionament gràcies a unes bobines que li comuniquen l'energia necessària. S'ha ajustat la seva distribució de masses de manera que amb un moment d'inèrcia I_0 = 1 kg m^2 té una freqüència pròpia f_0 = 1 Hz.

S'observa que si oscil·la lliurement l'amplitud es redueix a la meitat cada 10 oscil·lacions.

a) Determineu la raó d'esmorteïment ζ i la influència d'aquest en el període de les oscil·lacions lliures.

Per mantenir una oscil·lació d'amplitud φ_p = 0,05 rad mitjançant les bobines se li aplica un impuls cada vegada que passa per la posició d'equilibri en un sentit establert.

b) Es modifica la freqüència d'oscil·lació?

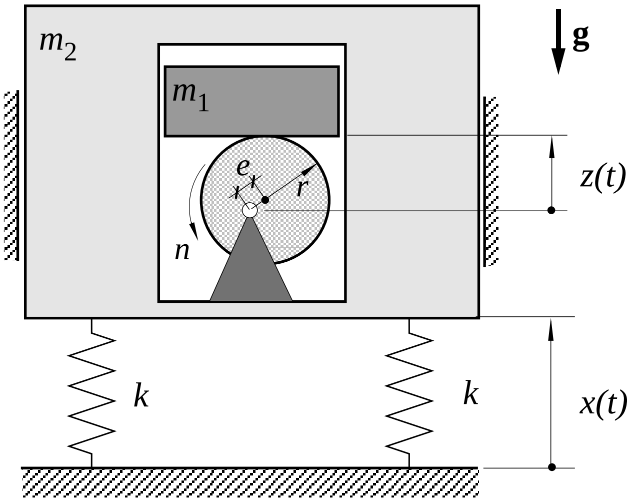
c) Quin és el moment respecte a l'articulació O de l'impuls necessari?

Després d'una modificació l'impuls es dóna en un extrem de l'oscil·lació, si bé s'ajusta per mantenir la mateixa amplitud d'oscil·lació.

d) Com es modifiquen el període d'oscil·lació i el moment de l'impuls?

Solució:
a) ζ = 0,0110 $(\Delta T/T)$ = 61·10^{-6}
b) No
c) M(O) = 0,02104 Nms
d) T = 0,9415 s M(O) =–0,1126 Nms

P2-35



m_1 = 0,5 kg	e = 1 mm
m_2 = 150 kg	r = 25 mm
k = 3000 N/mm	n = 2900 min^{-1}

En la màquina de la figura la corredora de massa m_1 = 0,5 kg es mou accionada per una lleva desmodròmica d'excèntrica i equilibrada. La bancada de massa m_2 = 150 kg està suportada per 4 elements elàstics de rigidesa k = 3000 N/mm situats prop de cadascun dels vèrtexs de la base.

La lleva de radi r = 25 mm i excentricitat e = 1 mm gira a n = 2900 min^{-1}. Determineu:

a) L'amplitud x_p del desplaçament de la bancada.

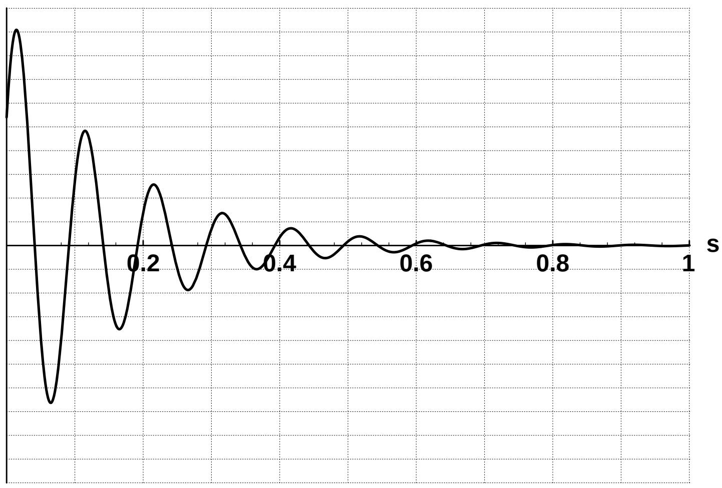
b) L'amplitud F_{Tp} de la força tramesa al terra.

Si la força tramesa no pot superar els 40 N i només es disposa del tipus d'elements elàstics esmentats,

c) Suggeriu una solució que no comporti disminuir el nombre de suports i feu-ne el càlcul de comprovació. Raoneu i justifiqueu si en aquesta solució els elements elàstics poden suportar la força estàtica.

Solució: a) x_p = 24,53 μm
b) F_{Tp} = 294,3 N
c) Col·locar dos elements elàstics en sèrie a cada suport.

P2-36



m = 1000 kg	u = 0,2 kgm
n = 750 min^{-1}	k = 10^7 N/m

Es vol instal·lar una màquina recolzada directament sobre un forjat i per tal de preveure el nivell de vibració que s'hi produirà es fa una estimació experimental de les caracterís-tiques del forjat en l'indret on s'instal·larà la màquina.

En un assaig estàtic s'obté una rigidesa vertical $k = 10^7$ N/m i en un assaig de resposta lliure s'obté el gràfic de vibració adjunt.

Determineu:

a) La freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment del forjat.

b) La massa i l'esmorteïment equivalents del forjat.

Si la màquina amb la seva bancada té una massa m = 1000 kg i la causa fonamental de la vibració és el rotor de la màquina que gira a n = 750 min^{-1} i el seu desequilibri màxim previsible és u = 0,2 kgm,

c) Quina és l'amplitud previsible del desplaçament del forjat?

Solució: a) f_0 = 10,05 Hz $\quad \zeta$ = 0,1009

b) m = 2507 kg $\quad c$ = 31,96 kN s / m

c) x_p = 103,7 µm

P2-37

Un grup motor-compressor està unit al circuit d'aire comprimit mitjançant una canonada flexible a fi d'eliminar un camí de transmissió de vibracions a l'estructura. Pel mateix motiu està muntat sobre una bancada amb 4 potes situades sobre elements elàstics iguals. La bancada més el grup tenen una massa $m = 200$ kg i la deformació estàtica dels elements elàstics sota el seu pes és $x_{est} = 2$ mm. En funcionament el compressor gira a $n = 2880$ min^{-1} i l'amplitud d'acceleració de la vibració vertical és $a_p = 3$ ms^{-2}. Determineu:

a) La força transmesa al terra.

b) El desequilibri del grup.

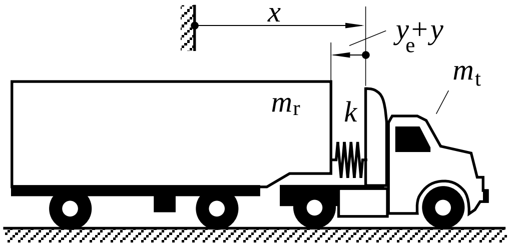
La vibració de la bancada es considera excessiva i es desitja disminuir-la aproximadament a la meitat sense augmentar la força transmesa.

c) Suggeriu una solució que no comporti utilitzar elements elàstics de diferent tipus i feu-ne els càlculs de comprovació. Raoneu i justifiqueu si en aquesta solució els elements elàstics poden suportar la força estàtica.

Solució:
a) $F_{Tp} = 32{,}36$ N
b) $u = 6{,}241$ kg mm
c) Cal augmentar la massa i la rigidesa al doble i per tant emprar 2 elements elàstics sota cadascuna de les potes.

Capítol 3

P3-1



m_t = 5000 kg m_r = 15000 kg
k = 100 N/mm
v_0 = 30 m/s v_r = 1 m/s

La figura esquematitza un vehicle tractor-remolc amb un enganxall elàstic de rigidesa k = 100 N/mm i llargada sense tensió y_e. Les masses del tractor i del remolc reduïdes al moviment d'avanç són respectivament m_t = 5000 kg i m_r = 15000 kg. Si el vehicle es troba en una carretera horitzontal recta, no acciona ni el motor ni els frens i les resistències passives són negligibles, determineu:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment del tractor $x(t)$ i el moviment relatiu $y(t)$ si el vehicle avança amb velocitat mitjana v_0 = 30 m/s i la velocitat relativa màxima és v_r = 1 m/s.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 20 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} 10^3 \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix}$

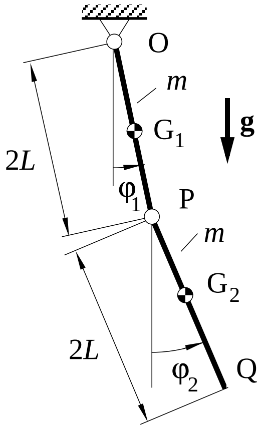
b) $f_1 = 0 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 0\}^\mathrm{T}$

$f_2 = 0{,}8219 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{3,\ 4\}^\mathrm{T}$

c) $x(t) = 30\,t + 0{,}1452\ \sin(2\pi f_2 t)$

$y(t) = 0{,}1936\ \sin(2\pi f_2 t)$

P3-2



m = 3 kg	L = 1 m
I_G = (1/3) mL^2	

En el sistema de la figura les dues barres OP i PQ són uniformes, de massa m = 3 kg i llargada $2L$ = 2 m, Les articulacions O i P són d'eixos horitzontals paral·lels i les resistències passives associades al moviment de les barres són negligibles. Per a les petites oscil·lacions a l'entorn de la posició d'equilibri $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, determineu:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment que s'estableix si es parteix del repòs en la configuració $\varphi_1 = \varphi_2 = 5°$.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} g$

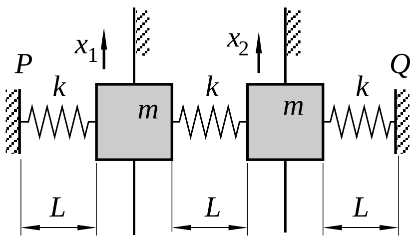
b) $f_1 = 0{,}3017 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{0{,}5729,\ 0{,}8196\}^{\mathrm{T}}$

$f_2 = 0{,}8090 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{0{,}4304,\ -0{,}9026\}^{\mathrm{T}}$

c) $\varphi_1(t) = 4{,}390° \cos(2\pi f_1 t) + 0{,}6102° \cos(2\pi f_2 t)$

$\varphi_2(t) = 6{,}280° \cos(2\pi f_1 t) - 1{,}280° \cos(2\pi f_2 t)$

P3-3



m = 0,5 kg	L = 0,25 m
T_0 = 10 kN	

En el sistema de la figura les molles es troben estirades amb una tensió T_0 suficientment elevada per poder-la considerar constant en els petits moviments a l'entorn de la configuració d'equilibri $x_1 = x_2 = 0$. Determineu per a aquests moviments:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment que s'estableix si es parteix de la configuració d'equilibri amb $\dot{x}_1 = 1 \text{ m/s}$, $\dot{x}_2 = -1 \text{ m/s}$.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} 4 \cdot 10^4$

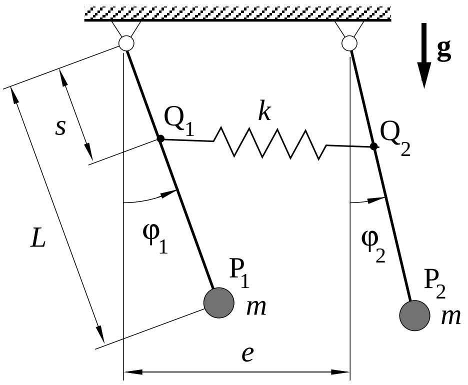
b) $f_1 = 45,02$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \sqrt{2}\,\{1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

$f_2 = 77,97$ Hz $\boldsymbol{p}_2 = \sqrt{2}\,\{1,\ -1\}^{\mathrm{T}}$

c) $x_1(t) = 2,041 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi f_2 t)$

$x_2(t) = -2,041 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi f_2 t)$

P3-4



Els dos pèndols de la figura són iguals i la molla que els uneix té una llargada sense tensió igual a la distància entre articulacions de manera que la configuració $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ és d'equilibri. Determineu per al moviment a l'entorn de la configuració d'equilibri:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment dels pèndols que s'estableix si parteixen del repòs en la configuració $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = 0$. Estudieu en detall el moviment quan la constant k de la molla és petita.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} mgL + ks^2 & -ks^2 \\ -ks^2 & mgL + ks^2 \end{bmatrix}$

b) $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

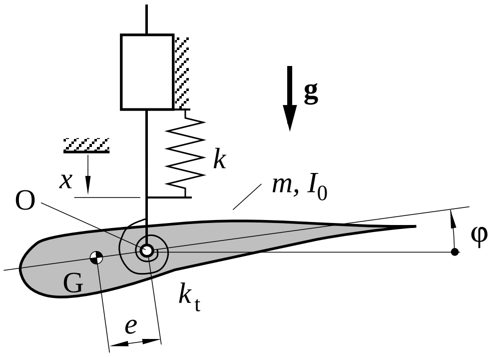
$f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgL + 2ks^2}{mL^2}}$ Hz $\boldsymbol{p}_2 = \{1,\ -1\}^{\mathrm{T}}$

c) $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{2}\varphi_0\left(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right)$

$\varphi_2(t) = \dfrac{1}{2}\varphi_0\left(\cos(2\pi f_1 t) - \cos(2\pi f_2 t)\right)$

Si k és petita en el moviment de cada pèndol es presenten batements decalats mig període de batement.

P3-5



m = 5 kg	I_0 = 0,5 kg m²
k = 10 N/mm	k_t = 1000 Nm/rad
e = 0,2 m	

Un perfil d'ala d'avió que s'ha d'assajar en un túnel de vent està suportat com s'indica a la figura. Les molles lineal i torsional s'han muntat de manera que la configuració $x = 0$, $\varphi = 0$ és d'equilibri. Determineu per a aquesta configuració:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment que s'estableix si es parteix del repòs en la configuració $x = 10$ mm, $\varphi = 0$.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^3 \end{bmatrix}$

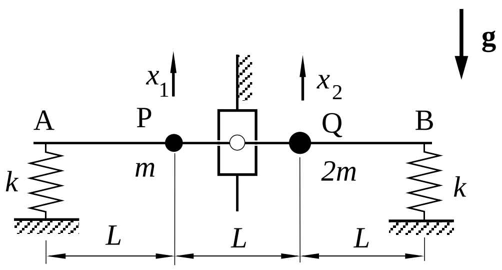
b) $f_1 = 5,571$ Hz $\quad$ $\boldsymbol{p}_1 = \{0,3015, \; 0,9535\}^{\mathrm{T}}$

$f_2 = 11,74$ Hz $\quad$ $\boldsymbol{p}_2 = \{0,3015, \; -0,9535\}^{\mathrm{T}}$

c) $x(t) = 5\big(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\big)$ mm

$\varphi(t) = 15,81 \cdot 10^{-3}\big(\cos(2\pi f_1 t) - \cos(2\pi f_2 t)\big)$ rad

P3-6



m = 12 kg	k = 1 N/mm

Les dues masses puntuals P i Q de la figura estan unides per la barra rígida AB de massa negligible. Aquesta barra recolza sobre molles de constant $k = 1$ N/mm i llargada sense tensió adequada per tal que la configuració amb la barra horitzontal, $x_1 = x_2 = 0$, sigui d'equilibri. Determineu:

a) La tensió de les molles en la configuració d'equilibri i per als petits moviments al seu entorn.

b) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

c) Les freqüències i modes propis de vibració.

d) Els punts nodals de cada mode propi.

e) El moviment que s'estableix si es parteix del repòs en la configuració $x_1 = x_2 = 10$ mm.

Solució: a) $T_A = 16g$ N $T_B = 20g$ N

b) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 10^3$

c) $f_1 = 1{,}178$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \{0{,}9212,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

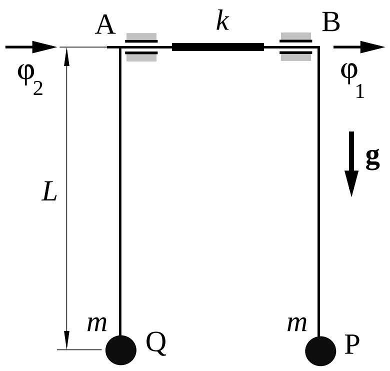
$f_2 = 3{,}800$ Hz $\boldsymbol{p}_2 = \{-2{,}171,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

d) Per al primer mode el node es troba a 11,68L a l'esquerra de P.
Per al segon mode el node es troba a 0,6847L a la dreta de P.

e) $x_1(t) = 9{,}446\ \cos(2\pi f_1 t) + 0{,}5535\ \cos(2\pi f_2 t)$ mm

$x_2(t) = 10{,}25\ \cos(2\pi f_1 t) - 0{,}2549\ \cos(2\pi f_2 t)$ mm

P3-7



Els dos pèndols de la figura són iguals i estan units per una barra que actua de molla de torsió de constant k de manera que la configuració $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ és d'equilibri. La massa de les barres així com les resistències passives són negligibles. Determineu per al moviment a l'entorn de la configuració d'equilibri:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i modes propis de vibració.

c) El moviment dels pèndols que s'estableix si es parteix de la configuració d'equilibri amb $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$. Estudieu en detall el moviment quan la constant k de la molla és petita.

d) La secció nodal de la barra en cada mode.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} mgL + k & -k \\ -k & mgL + k \end{bmatrix}$

b)

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL+2k}{mL^2}} \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{1,\ -1\}^{\mathrm{T}}$$

c)

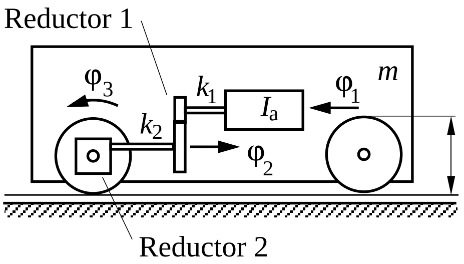
$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}_0}{2\pi f_1}\sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}_0}{2\pi f_2}\sin(2\pi f_2 t) \ \text{rad}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}_0}{2\pi f_1}\sin(2\pi f_1 t) - \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}_0}{2\pi f_2}\sin(2\pi f_2 t) \ \text{rad}$$

Si k és petita en el moviment de cada pèndol es presenten batements decalats mig període de batement.

d) En el primer mode totes les seccions de la barra tenen la mateixa rotació. La secció nodal del segon mode és la secció mitjana de la barra.

P3-8



I_a = 5 kg m²	I_b = 24 kg m²
I_c = 200 kg m²	m = 4000 kg
k_1 = 4·10⁵ Nm/rad	k_2 = 6·10⁵ Nm/rad
i_1 = 2	i_2 = 4
d = 1 m	

La cadena de transmissió d'un tractor de ferrocarril es pot esquematitzar en la forma indicada a la figura. La massa total del tractor és m, I_a és el moment axial d'inèrcia del rotor del motor, I_b és el moment d'inèrcia del reductor reduït a l'eix de sortida, I_c és el moment d'inèrcia de cada eix amb les dues rodes. Les rigideses torsionals dels arbres de transmissió són k_1 i k_2. Determineu:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i modes propis de vibració.

Solució: a)

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -8 & 22 & -24 \\ 0 & -24 & 96 \end{bmatrix} 10^5$$

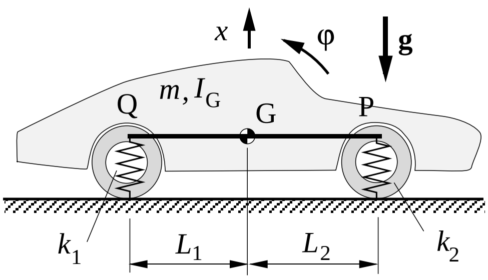
b)

$$f_1 = 0 \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{8,\ 4,\ 1\}^{\mathrm{T}}$$

$$f_2 = 21{,}83 \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{-0{,}9328,\ -0{,}3567,\ 0{,}05111\}^{\mathrm{T}}$$

$$f_3 = 63{,}60 \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_3 = \{-0{,}8951,\ 0{,}4459,\ -0{,}005001\}^{\mathrm{T}}$$

P3-9



m = 1200 kg	I_G = 200 kg m²
L_1 = 1,4 m	L_2 = 1,6 m
k_1 = 50 N/mm	k_2 = 30 N/mm

Un model simplificat per a l'estudi dinàmic de la suspensió d'un vehicle es pot reduir al sistema de dos graus de llibertat amb moviment pla representat a la figura en la configuració d'equilibri. Preneu com a coordenades generalitzades el desplaçament vertical x del centre d'inèrcia G i la rotació φ del xassís, ambdues a partir de la configuració d'equilibri. Determineu:

a) La tensió de les molles en la configuració d'equilibri i per als petits moviments al seu entorn.

b) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

c) Les freqüències i modes propis de vibració.

d) Els punts nodals de cada mode propi.

e) La condició que han de verificar les rigideses de les molles per tal que les coordenades generalitzades x i φ siguin dinàmicament desacoblades.

Solució: a) $T_1 = 640g$ N $\quad T_2 = 560g$ N

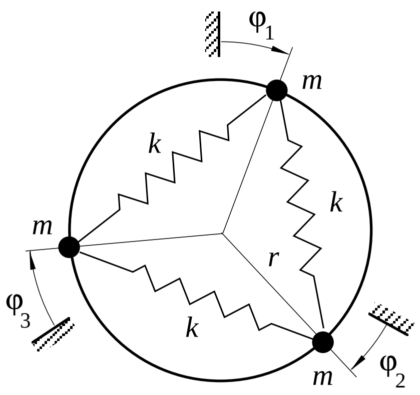
b) $$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1200 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 80 & -22 \\ -22 & 174{,}8 \end{bmatrix} 10^3$$

c) $$f_1 = 1{,}275 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{0{,}9909,\ 0{,}1346\}^{\mathrm{T}}$$
$$f_2 = 4{,}712 \text{ Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{0{,}02263,\ -0{,}9997\}^{\mathrm{T}}$$

d) Per al primer mode el node es troba a 7,362 m a l'esquerra de G.
Per al segon mode el node es troba a 22,64 mm a la dreta de G.

e) Cal que la matriu de rigidesa sigui diagonal i per tant $k_1 L_1 = k_2 L_2$

P3-10



m = 1 kg k = 10 N/mm
r = 0,25 m

Sobre la guia circular del sistema esquematitzat a la figura es poden moure sense frec les tres partícules de massa m que es troben unides per molles de constant k. La configuració amb les partícules a 120° és d'equilibri i per a aquesta configuració les molles es troben estirades amb una tensió T_0. Per a les petites oscil·lacions a l'entorn de la configuració d'equilibri determineu:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

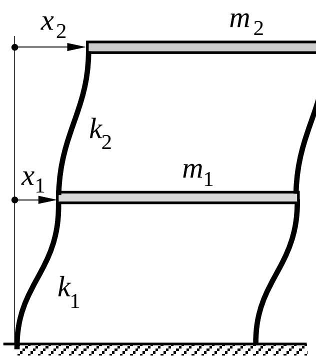
b) Les freqüències i modes propis de vibració.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \dfrac{625}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$f_1 = 0$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

b) $f_2 = f_3 = 13{,}78$ Hz $\boldsymbol{p}_2$ i $\boldsymbol{p}_3 = \{\varphi_{10},\ \varphi_{20},\ \varphi_{30}\}^{\mathrm{T}}$
amb $\varphi_{10} + \varphi_{20} + \varphi_{30} = 0$

P3-11



$m_1 = 2\,m_2 = 2\,m$
$k_1 = 2\,k_2 = 2\,k$

El dibuix de la figura esquematitza un edifici de dues plantes on es suposa que la massa està concentrada en els forjats, que aquests són totalment rígids i que el seu moviment a l'entorn de la configuració d'equilibri és horitzontal. Determineu per al moviment a l'entorn de la configuració d'equilibri:

a) Les matrius d'inèrcia i de rigidesa.

b) Les freqüències i els modes propis de vibració.

c) El moviment que s'estableix si es parteix del repòs a la configuració $x_1 = x_2 = x_0$.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

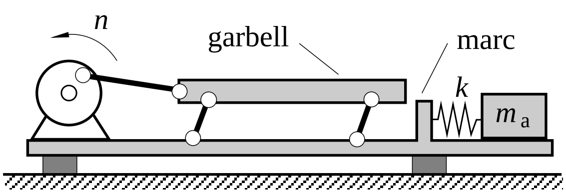
b) $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 2\}^{\mathrm{T}}$

$f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ Hz $\boldsymbol{p}_2 = \{1,\ -1\}^{\mathrm{T}}$

c) $x_1(t) = \dfrac{x_0}{3}\left(2\ \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right)$

$x_2(t) = \dfrac{x_0}{3}\left(4\ \cos(2\pi f_1 t) - \cos(2\pi f_2 t)\right)$

P3-12



$m_{\text{conjunt}} = 200$ kg $m_a = 50$ kg
$n = 600$ min^{-1}

Un garbell està muntat sobre un marc que recolza a terra a través d'uns elements elàstics. La massa del conjunt és $m = 200$ kg i la freqüència pròpia coincideix gairebé amb la d'excitació. El garbell té un moviment alternatiu de freqüència $n = 600$ min^{-1}. A fi de disminuir les vibracions del marc s'hi vol instal·lar un absorbent dinàmic no esmorteït de massa $m_a = 50$ kg. Determineu:

a) La rigidesa òptima k_2 de l'absorbent.

b) Les noves freqüències pròpies del sistema si es munta l'absorbent amb la rigidesa òptima.

Solució: a) $k_2 = 197{,}4$ N/mm

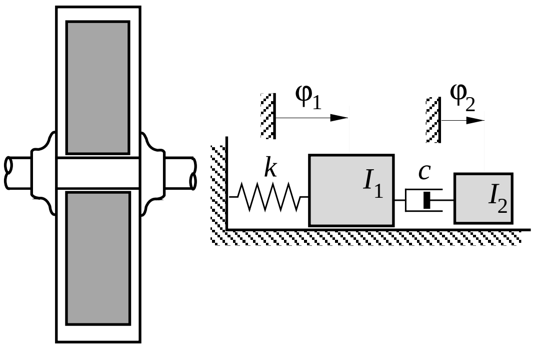
b) $f_1 = 7{,}808$ Hz $f_2 = 12{,}81$ Hz

P3-13

En una planta de refrigeració, durant la posta a punt, una secció de la canonada per la qual circula el refrigerant va vibrar violentament quan la velocitat de règim del compressor era $n = 232\ \text{min}^{-1}$. Per eliminar aquest problema es decideix muntar un absorbent dinàmic no esmorteït a la canonada. En una primera prova un esmorteïdor de massa $m_1 = 1$ kg muntat sobre la canonada i sintonitzat a la freqüència pròpia fa aparèixer dues ressonàncies, la inferior a freqüència $n_1 = 198\ \text{min}^{-1}$. A causa de possibles fluctuacions de la velocitat de funcionament del compressor es considera necessari que les ressonàncies de la canonada estiguin fora de la banda compresa entre $160\ \text{min}^{-1}$ i $320\ \text{min}^{-1}$. Determineu la massa m i la rigidesa k d'un absorbent adequat així com les freqüències de ressonància que s'obtindran.

Solució: $m = 5{,}707$ kg $\quad$ $k = 3{,}369$ N/mm
$n_1 = 160\ \text{min}^{-1}$ $\quad$ $n_2 = 336\ \text{min}^{-1}$

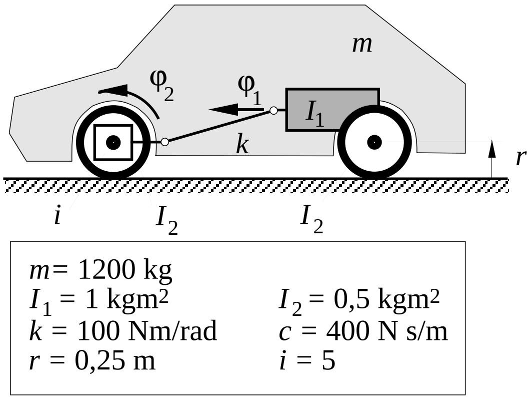
P3-14



Un absorbent de vibracions emprat en arbres amb vibracions torsionals consisteix en un volant situat dins d'una carcassa solidària a l'arbre i que pot girar respecte a aquest. L'espai entre el volant i la carcassa s'emplena amb fluid viscós que estableix acoblament dinàmic entre ambdós. A la figura es mostra l'esquema d'un sistema equivalent amb moviment lineal. Determineu el coeficient d'esmorteïment introduït a la vibració torsional de l'arbre.

Solució: $c_{\text{red}} = c\,\dfrac{I_2\omega^2}{I_2\omega^2 - c\omega j}$

P3-15



En el vehicle de la figura el rotor del motor està unit a l'eix motriu a través d'un eix elàstic de rigidesa k i d'un reductor de relació de reducció i. Les resistències passives són equivalents a una força reduïda a l'avanç $F = c\,v$ essent v la velocitat d'avanç. El vehicle es troba sobre una carretera horitzontal i recta i no acciona ni el motor ni els frens. Preneu el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}^{\mathrm{T}}$ i determineu:

a) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment.

b) Les freqüències i modes propis de vibració reals i l'esmorteïment associat a cadascun d'aquest modes si es negligeix l'acoblament per esmorteïment.

c) Els modes propis de vibració complexos.

d) Les expressions generals de $\boldsymbol{q}(t)$ utilitzant l'aproximació dels modes reals esmorteïts i els modes complexos.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 76 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix} 10^2 \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

b)

$$f_1 = 0 \ \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \{5,\ 1\}^{\mathrm{T}} \qquad c/m = 0{,}2475 \ \ \mathrm{s}^{-1}$$

$$f_2 = 1{,}835 \ \ \text{Hz} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \{-15{,}2\,,\ 1\}^{\mathrm{T}} \qquad \zeta_2 = 3{,}532 \cdot 10^{-3}$$

c)

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = -0{,}04069 + 11{,}53\mathrm{j} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2^* = \left\{15{,}20\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}3{,}113},\ 1,\ 175{,}3\,\mathrm{e}^{\,\text{-j}1{,}596},\ 11{,}53\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}1{,}574}\right\}$$

$$\lambda_3 = -0{,}2476 \qquad \boldsymbol{p}_3 = \{4{,}997,\ 1,\ -1{,}237,\ -0{,}2476\}^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_4 = 0 \qquad \boldsymbol{p}_4 = \{5,\ 1,\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}}$$

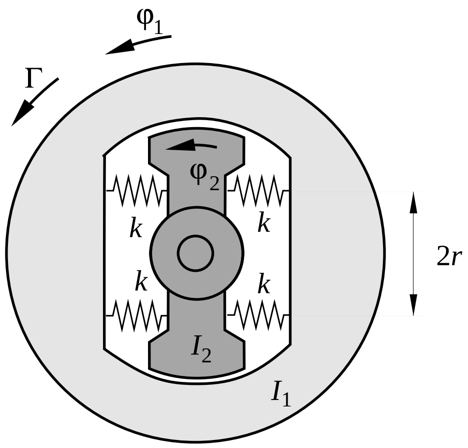
$$\boldsymbol{q}(t) = \left(A_1\,\mathrm{e}^{-0{,}2475\,t} + B_1\right)\begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \end{Bmatrix} + C_1\,\mathrm{e}^{-0{,}04071\,t}\begin{Bmatrix} 15{,}20\,\cos(11{,}53\,t + \phi_1 + \pi) \\ \cos(11{,}53\,t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

d)

$$\boldsymbol{q}(t) = \left(A_1\,\mathrm{e}^{-0{,}2476\,t}\begin{Bmatrix} 4{,}997 \\ 1 \end{Bmatrix} + B_1\begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) +$$

$$C_1\,\mathrm{e}^{-0{,}04069\,t}\begin{Bmatrix} 15{,}20\,\cos(11{,}53\,t + \phi_1 + 3{,}113) \\ \cos(11{,}53\,t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

P3-16



I_1 = 0,4 kgm^2	I_2 = 0,1 kgm^2
k = 25·10^3 N/m	c = 10 N m s
r = 100 mm	

Un volant d'inèrcia de moment axial d'inèrcia I_1 disposa d'un absorbent dinàmic torsional de moment axial d'inèrcia I_2 que pot girar lliurement respecte a l'arbre. Entre ambdós hi ha 4 molles iguals de constant k com s'indica a la figura i un fluid que introdueix entre ells un parell viscós $c\dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi}$ és la velocitat angular relativa).

Determineu:

a) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment del sistema.

b) Les freqüències i modes propis de vibració si es negligeix l'esmorteïment.

c) L'efecte de l'esmorteïment sobre les freqüències i modes propis.

d) La matriu de resposta harmònica si es pren com a entrada el vector $\boldsymbol{\Gamma} = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}^{\mathrm{T}}$ de parells d'excitació i com a sortida el vector $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2\}^{\mathrm{T}}$ de coordenades generalitzades.

e) L'amplitud de la rotació relativa en règim estacionari φ_{p} si s'aplica un parell oscil·latori $\Gamma(t)$ = 100 cos (100t) N m al volant.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} 10^3$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} 10$

b) $f_1 = 0$ Hz $\qquad \boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

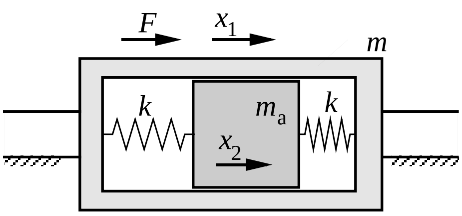
$f_2 = 17,79$ Hz $\qquad \boldsymbol{p}_2 = \{1,\ -4\}^{\mathrm{T}}$

c) La forma dels modes i f_1 no varien, f_2 = 14,75 Hz i el segon mode és esmorteït.

d) $\boldsymbol{H}(\omega) = \left[-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{C}\omega \mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right]^{-1}$

e) φ_{p} = 0,01961 rad

P3-17



m = 4 kg m_a = 1 kg
k = 5000 N/m T_0 = 1000 N
c = 100 N/(m/s)

La corredora de la figura de massa m pot lliscar lliurement al llarg de la guia i disposa d'un absorbent dinàmic lineal de massa m_a. Entre les dues masses hi ha dues molles de constant k i un fluid que introdueix un frec viscós $c\dot{x}$ ($\dot{x}$ és la velocitat relativa). Les molles estan comprimides amb una tensió T_0 per a $x_1 = x_2 = 0$. Determineu emprant els valors numèrics donats:

a) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment del sistema.

b) Les freqüències i modes propis de vibració si es negligeix l'esmorteïment.

c) L'efecte de l'esmorteïment sobre les freqüències i modes propis.

d) La matriu de resposta harmònica si es pren com a entrada el vector $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2\}^{\mathrm{T}}$ de forces d'excitació i com a sortida el vector $\dot{\boldsymbol{q}} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2\}^{\mathrm{T}}$ de velocitats generalitzades.

e) L'amplitud de la velocitat relativa en règim estacionari v_p si s'aplica una força oscil·latòria $F(t)$ = 1000 cos (200t) N a la corredora.

Solució: a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} 10^4$ $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} 10^2$

b) $f_1 = 0$ Hz $\boldsymbol{p}_1 = \{1,\ 1\}^{\mathrm{T}}$

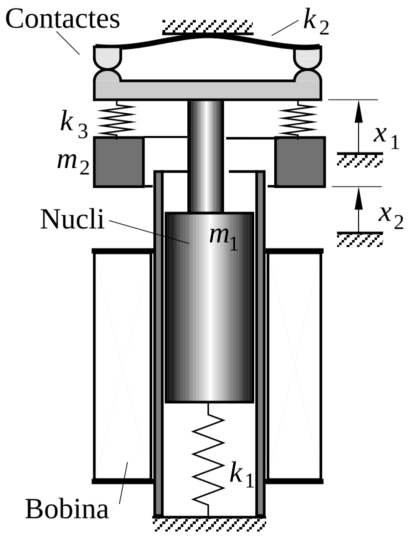
$f_2 = 17{,}79$ Hz $\boldsymbol{p}_2 = \{1,\ -4\}^{\mathrm{T}}$

c) La forma dels modes i f_1 no varien, f_2 = 14,75 Hz i el segon mode és esmorteït.

d) $\boldsymbol{H}(\omega) = \left[-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{C}\omega \mathrm{j} + \boldsymbol{K}\right]^{-1} \omega \mathrm{j}$

e) v_p = 1,345 m/s

P3-18



m_1 = 50 g	k_1 = 3 N/mm
k_2 = 1,2 N/mm	c = 2 N/(m/s)
f = 50 Hz	F_p = 1,5 N
m_2 = 5 g	k_3 = 0,5 N/mm

El nucli d'un relé magnètic té una massa m_1 = 50 g i la molla que el prem contra els contactes és de constant k_1 = 3N/mm. Els contactes estan muntats en una llata elàstica de rigidesa axial k_2 = 1,2 N/mm. Entre la guia i el nucli hi ha frec viscós de constant c = 2 N/m/s. Sobre el nucli actua una força electromagnètica sinusoïdal de freqüència f = 50 Hz i amplitud F_p = 1,5 N. Determineu:

a) La freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment del nucli.

b) L'amplitud de la fluctuació de força en els contactes.

A fi de disminuir aquestes fluctuacions s'incorpora un absorbent no esmorteït de massa m_2 = 5 g unit al nucli amb una molla de constant k_3 = 0,5 N/mm. Determineu:

c) La matriu d'estat del sistema nucli-absorbent.

d) Els modes propis de vibració complexos.

e) La inversa de la matriu de resposta harmònica si es pren com a entrada el vector de forces d'excitació $\boldsymbol{F}$ i com a sortida el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{x_1, x_2\}^T$.

f) L'amplitud de la fluctuació de força en els contactes amb aquest absorbent instal·lat.

Solució: a) f_0 = 46,13 Hz ζ = 0,06901 b) F_{Cp} = 1,862 N

c) $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -94 \cdot 10^3 & 10^4 & -40 & 0 \\ 10^5 & -10^5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

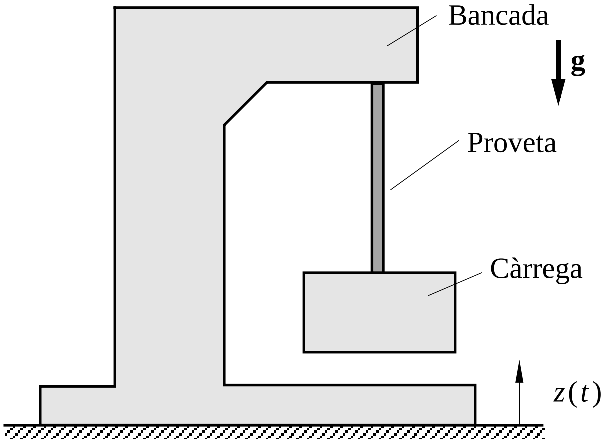
$$\lambda_1 = \lambda_2^* = -8,974 + 357,6\,\mathrm{j} \quad \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2^* = \left\{0,2853\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2,915},\ 1,\ 102\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1,319},\ 357,7\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1,596}\right\}^T$$

$$\lambda_3 = \lambda_4^* = -11,03 + 256,0\,\mathrm{j} \quad \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4^* = \left\{0,3505\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,0,1617},\ 1,\ 89,81\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1,452},\ 256,2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1,614}\right\}^T$$

e) $$[\boldsymbol{H}(\omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} -50 \cdot 10^{-3}\omega^2 + 2\omega\mathrm{j} + 4700 & -500 \\ -500 & -5 \cdot 10^{-3}\omega^2 + 500 \end{bmatrix}$$

f) F'_{Cp} = 0,04665 N

P3-19



m_b =1000 kg	δ = 1,8 mm
m_c = 20 kg	ζ = 0,1
$k_{proveta}$ = $5 \cdot 10^6$ N/m	$z(t) = 30 \cos(2\,\pi\, 74\, t)$ µm

A la figura es mostra de manera esquemàtica la disposició d'un muntatge per realitzar assaigs de fluència.

La proveta té una rigidesa longitudinal entre extrems $k = 5 \cdot 10^6$ N/m i la seva massa així com l'esmorteïment que introdueix es poden considerar negligibles.

A causa del funcionament d'un equip instal·lat en una zona propera la bancada solidària al terra vibra amb un moviment harmònic vertical $z(t) = 30 \cos(2\pi\, 74\, t)$ µm.

Determineu (Suggeriment: feu-vos un esquema simple del sistema en cada situació):

a) L'amplitud del moviment vertical absolut de la càrrega.

b) L'amplitud de la força de tracció dinàmica aplicada a la proveta.

A fi de millorar les condicions d'assaig, es col·loca un aïllament elàstic entre la bancada i el terra. La deformació estàtica d'aquest sota el pes de la bancada és δ = 1,8 mm i amb un assaig de resposta lliure s'ha obtingut una raó d'esmorteïment ζ = 0,1 per al moviment vertical. Determineu:

c) L'amplitud del moviment de la bancada (sense proveta ni càrrega).

d) Una estimació de la nova força de tracció dinàmica aplicada a la proveta (Suggeriment: suposeu que la presència de la proveta no modifica sensiblement el moviment de la bancada).

Per tal de realitzar un estudi més precís del muntatge complet (bancada amb aïllament i proveta amb càrrega) es decideix utilitzar un model de dos graus de llibertat (moviment vertical de la bancada i de la càrrega). Determineu, considerant el terra en repòs:

e) Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment.

f) La matriu d'estat que apareix en la determinació dels modes complexos.

Solució: a) x_p = 221,8 µm

b) F_p = 958,9 N

c) y_p = 1,247 µm

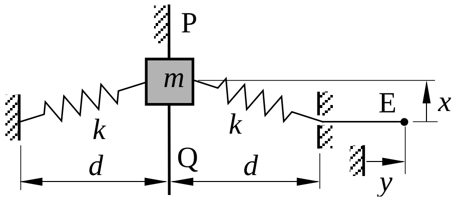
d) F'_p = 39,86 N

e) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10,45 \end{bmatrix} 10^6 \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14,67 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$

f) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -250 \cdot 10^3 & 250 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 5 \cdot 10^3 & -10,45 \cdot 10^3 & 0 & -14,76 \end{bmatrix}$

Capítol 4

P4-1



En el sistema de la figura la corredora de massa m pot lliscar sobre la guia PQ. La tensió de la molla dreta es pot variar movent el seu extrem E. Per a $x = 0$, $y = 0$ la tensió de la molla és T_0.

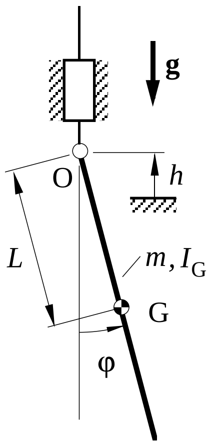
a) Determineu l'equació del moviment per a les petites oscil·lacions de la corredora al voltant de la posició d'equilibri.

b) Estudieu l'estabilitat d'aquestes oscil·lacions si el moviment de l'extrem E de la molla dreta és $y(t) = y_p \cos(2\pi f\, t)$. Considereu el cas en el que $f^2 = 0{,}4 f_0^2 = 0{,}01 f_0'^2$ essent f_0 la freqüència pròpia transversal amb $y(t) = 0$ i f_0' la freqüència pròpia longitudinal si la guia no hi fos i $y(t) = 0$.

Solució: a) $$\ddot{x} + \left(\frac{2T_0}{md} + \frac{k y_p}{md} \cos(2\pi f\, t) \right) x = 0$$

b) Inestabilitat si $\dfrac{y_p}{d} \geq 0{,}03$

P4-2



L'articulació del pèndol de la figura es desplaça verticalment segons l'expressió $h(t) = -\, h_p \cos(2\pi f\, t)$.

a) Determineu l'equació del moviment i les configuracions d'equilibri.

b) Estudieu l'estabilitat de les configuracions d'equilibri per a $(m\,L/I_0) = 1\ \mathrm{m}^{-1}$ $h_p = 0{,}1\mathrm{m}$.

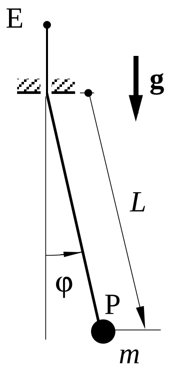
Solució: a) $$\ddot{\varphi} + \left(\frac{mgL}{I_0} + \frac{mL}{I_0} (2\pi f)^2 h_p \cos(2\pi f\, t) \right) \sin\varphi = 0$$

Les configuracions d'equilibri corresponen a $\varphi = n\,\pi$ amb $n = 0, 1, ...$

b) Per a $\varphi_{eq} = 0$ només és inestable per a $f = 2f_0/n$ amb $f_0 = 0{,}4985$ Hz, $n = 1, 2, ...$ i un petit entorn.

Per a $\varphi_{eq} = \pi$ només és estable si $f \geq 7{,}05$ Hz.

P4-3



En el pèndol de la figura es mou l'extrem E del fil de manera que la seva llargada és $L(t) = L_0 + L_1 \cos(2\pi f\, t)$.

a) Determineu l'equació del moviment per a les petites oscil·lacions del pèndol al voltant de la configuració d'equilibri.

b) Estudieu l'estabilitat d'aquestes configuracions si $L_0 = 1$ m, $L_1 = 0{,}01$ m.

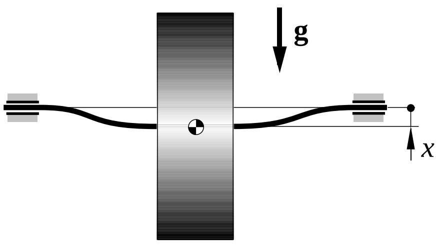
Solució: a) $\ddot{\varphi} + \dfrac{2\dot{L}}{L}\dot{\varphi} + \dfrac{g}{L}\varphi = 0$

b) És inestable per a $f = 2\, f_0 = 1{,}003$ Hz amb

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_0}}\,.$$

Per a la resta de freqüències l'estabilitat és crítica.

P4-4



A causa de la manca de simetria de revolució la rigidesa d'un arbre a flexió mesurada en un pla i referida al desplaçament del seu punt mitjà es pot expressar com $k = k_0 + k_1 \cos(2\varphi)$ essent φ l'angle que posiciona el pla respecte a l'arbre. Aquest arbre suporta simètricament un rotor rígid equilibrat i gira amb velocitat angular $\omega = 2\pi\, f$ constant.

a) Determineu l'equació del moviment per a les petites oscil·lacions $\varepsilon(t)$ de flexió en el pla vertical.

b) Estudieu l'estabilitat d'aquestes oscil·lacions considerant $k_1 << k_0$.

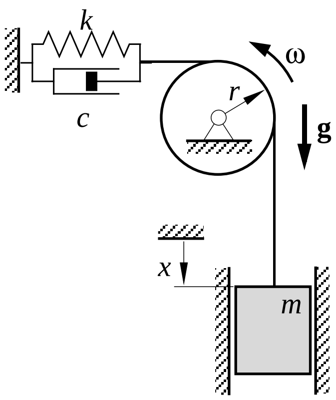
Solució: a) $\ddot{\varepsilon} + \left(\dfrac{k_0}{m} + \dfrac{k_1}{m}\cos(4\pi f\, t)\right)\varepsilon = -\dfrac{k_1}{k_2}\, g \cos(4\pi f\, t)$

b) Ressonància per a $f = \dfrac{f_0}{2}$ amb $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_0}{m}}$

Inestabilitat per a $f = f_0/n$ amb $n = 1, 2, \ldots$

Capítol 5

P5-1



El sistema de la figura s'utilitza com a fre de cinta per introduir un parell a l'eix de la politja. La cinta es considera inextensible i de massa negligible. El coeficient de frec sec entre la politja i la cinta és funció de la velocitat de lliscament $\mu(v_{\text{llis}})$. Per a $x = 0$ la molla està distesa si la politja pot girar lliurement.

a) Determineu, en funció de la velocitat de rotació de la politja, la posició d'equilibri del bloc i el parell de frenada.

b) Establiu l'equació del moviment per a les petites oscil·lacions a l'entorn de la posició d'equilibri.

c) Estudieu la possibilitat d'autoexcitació de vibracions en el fre.

Solució: a) $x_{eq} = \dfrac{mg}{k\mathrm{e}^{\mu_0(\pi/2)}}$ amb $\mu_0 = \mu(\omega r)$ $\quad \Gamma = mgr\,\dfrac{\mathrm{e}^{\mu(\pi/2)} - 1}{\mathrm{e}^{\mu(\pi/2)}}$

b) $m\ddot{\varepsilon} + \left(\mathrm{e}^{\mu_0(\pi/2)}c + mg\dfrac{\pi}{2}b\right)\dot{\varepsilon} + \mathrm{e}^{\mu_0(\pi/2)}k\,\varepsilon = 0$ amb $b = \dfrac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,v_{\text{llis}}}$

c) S'inicia autoexcitació si $b < -\dfrac{\mathrm{e}^{\mu_0(\pi/2)}c}{mg\dfrac{\pi}{2}}$